



# Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018  
Prof. Dr. C. Burstedde  
J. Holke



## Übungsblatt 11.

Abgabe am **Dienstag, 15.01.2018.**

### Aufgabe 1. (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Tschebyscheffpolynome

$$p_i(x) = \cos((i+1) \arccos(x)), \quad (1)$$

$i \geq 0$ , orthogonal sind bezüglich

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_{-1}^1 \omega(x) f(x) g(x) dx, \quad (2)$$

mit  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Berechnen Sie für  $n > 0$  die Nullstellen  $x_i$  von  $p_{n+1}$ , sowie die entsprechenden Gewichte der Gaußquadratur,  $\omega_i = \Lambda_{n+1}(x_i)$ .

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, dass es keine Quadraturformel der Form

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) \quad (3)$$

mit Stützstellen  $x_i$  und Gewichten  $\omega_i$  zur Bestimmung von

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \quad (4)$$

gibt, welche exakt ist für alle Polynome von Grad  $2n+2$ .

### Aufgabe 3. (8 + 2 = 10 Punkte)

a) Sei eine Quadraturformel  $Q[f; a, w, x]$  durch

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \approx Q[f] := \sum_{k=0}^{m-1} a_k f(y_k) + \sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$$

gegeben, wobei nur die  $y_k$ ,  $k = 0, \dots, m-1$  bereits fixiert sind.

Sei  $r(x) = (x - y_0)(x - y_1) \cdots (x - y_{m-1})$  sowie  $s(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ .

Zeigen Sie:  $Q[f; a, w, x]$  ist dann und nur dann exakt für alle Polynome  $p \in \mathcal{P}_{m+2n+1}$ , wenn gilt

1.  $Q[f; a, w, x]$  ist exakt für  $p \in \mathcal{P}_{m+n}$  und
2.  $\int_a^b w(x) r(x) s(x) p(x) dx = 0$  für alle  $p \in \mathcal{P}_n$ .

b) Benutzen Sie einen Spezialfall von Teil a), um Satz 4.3 aus der Vorlesung zu zeigen.

**Programmieraufgabe 1.** (10 Punkte) Diese Aufgabe läuft darauf hinaus, die Gaußquadratur auf die bisherigen Integrationsprobleme anzuwenden. Hierfür müssen die Stützstellen  $x_i$  und die Gewichte  $\omega_i$  berechnet werden.

a) Installieren Sie die LAPACK<sup>1</sup> Bibliothek. Auf den Arbeitsplatzrechnern im CIP-Pool ist LAPACK bereits installiert und kann mit `-llapack -lblas` im Compilierbefehl gelinkt werden.

b) Die Legendrepolynome  $\{p_i\}$  als Orthogonalpolynome bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle_0 = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \quad (5)$$

erfüllen

$$p_{i+1}(x) = (x - \alpha_i)p_i(x) - \beta_i^2 p_{i-1}(x) \quad (6)$$

mit  $\alpha_i = 0, \beta_i = \frac{i}{\sqrt{4i^2-1}}$ . Bestimmen Sie die Eigenwerte  $x_i$  und Eigenvektoren  $\hat{v}_i$  der Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & & \\ & & \ddots & \beta_n & \\ & & & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad (7)$$

sowie die zugehörigen Gewichte  $\omega_i$ .

Nutzen Sie hierzu die Funktion `dsteqr`<sup>2</sup> aus LAPACK, welche den QR Algorithmus auf Tridiagonalmatrizen anwendet. Um die in FORTRAN implementierte Routine von C aus aufzurufen, muss vor dem Aufruf die Deklaration

```
void dsteqr_ (char *COMPZ, int *N, double *D,
             double *E, double *Z, int *LDZ,
             double *WORK, int *INFO);
```

erfolgen und die Funktion mit `dsteqr_` aufgerufen werden. **Achtung:** alle Argumente werden hierbei zu Pointern; das Array  $Z$  sollte von Länge  $(n+1)^2$  sein und die Parameter  $N$  und  $LDZ$  sollten entsprechend auf einen Integer mit Wert  $n+1$  zeigen.  $COMPZ$  sollte auf 'I' zeigen und  $INFO$  auf einen Integer mit Wert 0.

**Hinweis:** Es gilt  $\omega_i = 2v_{i,1}^2$ , wobei  $v_{i,1}$  der erste Eintrag des normierten Vektors  $v_i$  ist.

c) Für die Gaußquadratur von

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx \quad (8)$$

müssen die  $x_i$  und  $\omega_i$  noch auf das entsprechende Intervall transformiert werden durch

$$\hat{x}_i = \pi x_i + \pi, \quad \hat{\omega}_i = \pi \omega_i. \quad (9)$$

Implementieren Sie nun eine Gaußquadratur für die Bestimmung von  $\langle f, g \rangle$  mit Stützpunkten  $\hat{x}_i$  und Gewichten  $\hat{\omega}_i$ . Berechnen Sie hiermit die Vektoren  $\underline{f}$  und  $\underline{\hat{f}}$  von Zettel 1 und Zettel 5 für  $n = 0, \dots, 4$  (also bis Polynomgrad 9). Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den Berechnungen aus den vorherigen Programmieraufgaben.

Die Bearbeitung erfolgt in Zweiergruppen.  
 Abgabe Montag 21.01.18 oder Dienstag 22.01.18 im CIP-Pool Wegelerstrasse.  
 Bitte tragen Sie sich rechtzeitig im CIP-Pool Wegelerstrasse in die Abgabeliste für diese Vorlesung ein.

<sup>1</sup><http://www.netlib.org/lapack/>

<sup>2</sup><https://tinyurl.com/y7g3deyh>