



Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018
Prof. Dr. C. Burstedde
J. Holke



Übungsblatt 5.

Abgabe am **Dienstag, 21.11.2017.**

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Gegeben sei die Gewichtsfunktion

$$\omega(x) = 1 + x^2.$$

Berechnen Sie die Orthogonalpolynome ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 bezüglich des gewichteten Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 \omega(x) f(x) g(x) dx.$$

Aufgabe 2. (5 + 5 = 10 Punkte)

Es seien $L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$, $n \geq 0$ die Legendrepolynome. Zeigen Sie:

a)

$$\int_{-1}^1 L_n(x) L_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \quad (1)$$

wobei δ_{nm} das Kronecker-Delta bezeichnet.

b) Die skalierten Polynome $p_n = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} L_n$ erfüllen eine Rekursionsformel der Form

$$p_{-1}(x) = 0, \quad (2)$$

$$p_0(x) = 1, \quad (3)$$

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) p_n(x) - \beta_n^2 p_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \quad (4)$$

mit $\alpha_n = 0$ und $\beta_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2 - 1}}$.

Programmieraufgabe 1. (5 + 5 + 5 + 5 = 20 Punkte)

a) Programmieren Sie einen Löser für das Gleichungssystem $Ax = b$ im Reellen mit Hilfe einer QR -Zerlegung von A . Das heißt, berechnen Sie erst $A = QR$ und lösen Sie dann $Rx = Q^T b$. Es reicht wieder, Q nicht aufzustellen, sondern die Householdervektoren zu speichern.

b) Lösen Sie damit das Gleichungssystem $Gx = \underline{f}$ mit der Gram-Matrix G und der rechten Seite \underline{f} von Übungszettel 1.

c) Implementieren Sie die Rekursionsformel

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad (5)$$

zum Auswerten der Legendrepolynome gegeben n und x .

- d) Berechnen Sie die Gram-Matrix \hat{G} und den Vektor \hat{f} , die sich ergeben, wenn man als Basis von \mathcal{P}_{n-1} die Legendrepolynome $[L_0, L_1, \dots, L_{n-1}]$ nimmt. Lösen Sie das Gleichungssystem $\hat{G}x = \hat{f}$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis aus Teil b) (für $n \leq 4$). *Hinweis: Für die Matrix \hat{G} beachten Sie Aufgabe 2a.*

Die Bearbeitung erfolgt in Zweiergruppen.
Abgabe Montag 27.11.17 oder Dienstag 28.11.17 im CIP-Pool Wegelerstrasse.
Bitte tragen Sie sich rechtzeitig im CIP-Pool Wegelerstrasse in die Abgabeliste für diese Vorlesung ein.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 23.11. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 20.11., Di. 21.11. und Mi 22.11. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weitere Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de.