Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018
Prof. Dr. C. Burstedde
J. Holke

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 8.

Abgabe am **Dienstag, 12.12.2017**.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit mit größtem Eigenwert $\lambda_n = 4$ und kleinstem Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Wie viele Iterationen benötigt das CG-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ höchstens, um eine relative Genauigkeit in der $\|.\|_A$-Norm von 10^{-6} zu erreichen?

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt zeilenäquilibriert, falls gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{jk}| = 1$ für alle $j = 1, \dots, n$.
Weiterhin sei $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$ die Konditionszahl bezüglich der Maximumsnorm. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ zeilenäquilibriert und regulär. Dann gilt für jede reguläre Diagonalmatrix $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Abschätzung $\kappa_\infty(A) \le \kappa_\infty(DA)$.

b) Für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definiere die Diagonalmatrix

$$T := \operatorname{diag}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}) \quad \text{mit} \quad \alpha_j = \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|. \tag{1}$$

Dann gilt $\kappa_\infty(TA) \le \kappa_\infty(A)$.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Es sei $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix mit

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \beta\gamma > 0. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass

$$\lambda_k = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma}\,\operatorname{sgn}(\beta)\cos(\frac{k\pi}{n+1}), \quad 1 \le k \le n \tag{3}$$

die Eigenwerte zu den Eigenvektoren

$$[v_k]_l = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{l-1}{2}} \sin\left(\frac{kl\pi}{n+1}\right) \tag{4}$$

sind.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Der Vektor $x^* = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ löst das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass das GMRES-Verfahren mit $x_0 = 0$ die Iterierten $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$ und $x_n = x^*$ liefert.

Bemerkung: In den ersten $n-1$ Schritten liefert das Verfahren für dieses Beispiel also keine Approximation an die Lösung und es findet zunächst keine schrittweise Verbesserung statt.