

Aufgabe 6: Führen Sie die folgende Polynomdivision mit Rest durch, d.h. bestimmen Sie ein Polynom $q(x)$ mit

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = q(x)(x + 1) + c.$$

LÖSUNG: Wir werten das Polynom

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$$

an der Stelle $x_0 = -1$ mit dem Horner Schema aus:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -3 & 0 & 2 & -1 \\ & -1 & 4 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -4 & 4 & -2 & 1 \end{array}$$

Wir erhalten somit

$$p(x) = (x + 1)(x^3 - 4x^2 + 4x - 2) + 1$$

Aufgabe 7: Sind die folgenden Funktionen stetig auf ihrem Definitionsgebiet?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2 & , \text{ auf } \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & , \text{ für } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x} \text{ auf } \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$\text{c) } f(x) = |x - 1| + |x + 1| \text{ auf } \mathbb{R}$$

$$\text{d) } f(x) = \sqrt[4]{|x|} \text{ auf } \mathbb{R}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 1 & , x \leq 2 \\ -\frac{x^3}{4} + 3 & , x > 2 \end{cases} \text{ auf } \mathbb{R}$$

LÖSUNG:

- a) Ja! Die Cosinus-Funktion sowie die Funktionen $\frac{1}{x}$ und x^2 sind stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da die Verkettung sowie das Produkt stetiger Funktionen stetig ist, ist $\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir müssen also schauen, ob die Funktion $f(x)$ stetig in $x = 0$ ist. Dazu betrachten wir den Grenzwert von $\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2$ für $x \rightarrow 0$.

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2 \leq x^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow 0,$$

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2 \geq -x^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow 0.$$

D.h. $\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2 \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$ und somit ist die Funktion $f(x)$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

- b) Ja! Zunächst wissen wir, dass x^2 und $1 - x$ stetig sind. Ihr Nullstellenmengen sind $N_{x^2} = \{0\}$ und $N_{1-x} = \{1\}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\frac{1}{x^2}$ stetig ist auf $\mathbb{R} \setminus N_{x^2}$ und $\frac{1}{1-x}$ stetig ist auf $\mathbb{R} \setminus N_{1-x}$. Da sie Summe zweier stetiger Funktionen auch stetig ist, ist $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

- c) Ja! Da die Betragsfunktion auf $\mathbb{R}$ stetig ist und die Summe zweier stetiger Funktionen auch wieder stetig ist, ist $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$.
- d) Ja! $f(x)$ lässt sich umschreiben zu

$$f(x) = \sqrt[4]{|x|} = \sqrt{\sqrt{|x|}}.$$

Die Betragsfunktion ist auf $\mathbb{R}$ stetig und bildet auf $\mathbb{R}_0^+$ ab. Da die Wurzelfunktion auf $\mathbb{R}_0^+$ stetig ist und die Verkettung stetiger Funktionen stetig ist, ist $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$.

- e) Ja! $\frac{x^2}{2} - 1$ und $-\frac{x^3}{4} + 3$ sind stetig auf $\mathbb{R}$. Da

$$\frac{2^2}{2} - 1 = 1 = -\frac{2^3}{4} + 3$$

besitzt die Funktion $f(x)$ keinen Sprung an der Stelle $x = 2$ und ist somit stetig.