Aufgabe 10: Ist $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) x^2 & \text{, auf } \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{, für } x = 0 \end{cases}$ differenzierbar in 0?

LÖSUNG:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\cos\left(\frac{1}{h}\right) h^2 - 0}{h} = h \cos\left(\frac{1}{h}\right) \to 0 \quad \text{für } h \to 0$$

D.h. $f(x)$ ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

Aufgabe 11: Zeigen Sie, dass gilt:

$$f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Tipp: Berechnen Sie $f(0)$ und $f'(x)$.

LÖSUNG: Es gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= 1\,, \text{ da } \cos 0 = 1\,, \sin 0 = 0\,, \\ f'(x) &= 2\cos x \cdot (-\sin x) + 2 \sin x \cdot \cos x \\ &= 2(\sin x \cos x - \sin x \cos x) \equiv 0\,. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$f(x) = \text{const.} = 1\,, \text{ da wir gezeigt haben, dass } f(0) = 1\,.$$