

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Aufgabe:	1	2	3	$\emptyset$
Note:				

Jede Aufgabe wird mit A (gut), B (ausreichend) oder C (nicht ausreichend) bewertet.
Die Gesamtnote ergibt sich als Durchschnitt der Einzelnoten.

Aufgabe 1: Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=0}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

LÖSUNG:

Induktionsanfang (IA): Für $n = 0$ ist die Formel korrekt:

$$\sum_{k=0}^0 k(k+1) = 0(0+1) = 0 = \frac{0(0+1)(0+2)}{3}$$

Induktionsannahme (IAN): Die Formel

$$\sum_{k=0}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$

Behauptung: Die Formel ist korrekt für $n+1 \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=0}^n k(k+1) + (n+1)(n+2) \stackrel{(\text{IAN})}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Also gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2: Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^2}{n^2 + n},$$

ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + \sqrt{n}}{5n^4 + n^{\frac{4}{3}}}$$

LÖSUNG:

i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^2}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} - 1}{1 + \frac{1}{n}} = -1,$$

da $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ und $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ ✓.

ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + \sqrt{n}}{5n^4 + n^{\frac{4}{3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{-1} + n^{-\frac{7}{2}}}{5 + n^{-\frac{8}{3}}} = 0,$$

da $n^{-a} \rightarrow 0$ für $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \rightarrow \infty$ ✓.

Aufgabe 3: Welche der folgenden Funktionen lassen sich an der Stelle $x = 2$ stetig ergänzen, welcher Funktionswert ergibt sich:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-2}{x^3-4x}, \text{ b) } h(x) = \frac{x^2-4}{(x-2)^2}?$$

LÖSUNG:

a)

$$f(x) = \frac{x-2}{x^3-4x} = \frac{x-2}{x(x^2-4)} = \frac{x-2}{x(x+2)(x-2)} \stackrel{x \neq 2}{=} \frac{1}{x(x+2)}$$

stetig ergänzbar in $x = 2$ mit Funktionswert: $f(2) := \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$.

b)

$$h(x) = \frac{x^2-4}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-2)} \stackrel{x \neq 2}{=} \frac{x+2}{x-2}$$

nicht stetig ergänzbar!

$$h(2 \pm h) = \frac{2 \pm h + 2}{2 \pm h - 2} = \frac{4 \pm h}{\pm h} = 1 \pm \frac{4}{h} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } +, h > 0, h \downarrow 0 \\ -\infty & \text{für } -, h > 0, h \uparrow 0 \end{cases}$$