

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie  $x \in \mathbb{R}$  aus der folgenden Gleichung:

$$9x - 2 = 6 + 13x.$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} 9x - 2 &= 6 + 13x && | + 2 \\ \Leftrightarrow 9x &= 8 + 13x && | - 13x \\ \Leftrightarrow (-4)x &= 8 && | : (-4) \\ \Leftrightarrow \boxed{x = -2} & . \end{aligned}$$

Probe:

$$\left. \begin{aligned} 9 \cdot (-2) - 2 &= -18 - 2 = -20 \\ 6 + 13 \cdot (-2) &= 6 - 26 = -20 \end{aligned} \right\} \checkmark$$

**Aufgabe 2:** Bestimmen Sie  $x$  und  $y \in \mathbb{R}$  aus den folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 12 - 3y + 5x &= 11y + 37 - 6x \\ y - 17 &= 9x - 27. \end{aligned}$$

LÖSUNG: Zeile II  $\Leftrightarrow y = 9x - 27 + 17 = 9x - 10$

Zeile I umformen:

$$\begin{aligned} 11x - 14y = 25 &\Leftrightarrow 11x = 14y + 25 \\ &\Leftrightarrow 11x = 14 \cdot (9x - 10) + 25 \\ &= 126x - 140 + 25 \\ &= 126x - 115 \\ &\Leftrightarrow 115x = 115 \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = 1} . \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = 9 \cdot 1 - 10 = 9 - 10 = -1.$$

Probe:

i)

$$(-1) - 17 = -18 = 9 \cdot (+1) - 27 = 9 - 27 \quad \checkmark$$

ii)

$$\begin{aligned} 12 - 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 &= 11 \cdot (-1) + 37 - 6 \cdot 1 \\ \Leftrightarrow 12 + 3 + 5 &= -11 + 37 - 6 \\ \Leftrightarrow 20 &= 20 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Lösungsverfahren: Einsetzungsverfahren!

Alternatives Lösungsverfahren: Additionsverfahren (später werden wir dieses Verfahren Gauss-Algorithmus nennen!)

$$\begin{array}{rcl} 11x - 14y & = & 25 \\ - 9x + y & = & -10 \quad | \cdot 14 \\ \hline - 115x & = & -115 \quad | : (-115) \\ & \boxed{x = 1} & . \end{array}$$

$$\Rightarrow -9 + y = -10 \Leftrightarrow \boxed{y = -1}.$$

**Aufgabe 3:** Geben Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen an !

(Achtung: Multiplikation mit negativen Zahlen führt zur Umkehrung des Ungleichheitszeichens.)

a)  $\frac{3x + 2}{2x - 1} < 2$

b)  $\frac{2x + 4}{5x - 7} > 3$

LÖSUNG: a) **1. Fall:**  $2x - 1 > 0$ , d.h.  $x > \frac{1}{2}$

Aus obiger Ungleichung folgt nun unter Beachtung von  $2x - 1 > 0$ :

$$(3x + 2) < 2(2x - 1) \implies 3x + 2 < 4x - 2 \implies x > 4.$$

Damit erhalten wir als Lösungsmenge im 1. Fall:

$$L_1 = \{x : x > \frac{1}{2} \text{ und } x > 4\} = \{x : x > 4\}$$

**2. Fall:**  $2x - 1 < 0$ , d.h.  $x < \frac{1}{2}$

Aus obiger Ungleichung folgt nun:

$$(3x + 2) > 2(2x - 1) \implies 3x + 2 > 4x - 2 \implies x < 4.$$

Damit erhalten wir als Lösungsmenge im 2. Fall:

$$L_2 = \{x : x < \frac{1}{2} \text{ und } x < 4\} = \{x : x < \frac{1}{2}\}$$

Die vollständige Lösung obiger Ungleichung ist damit

$$L_{ges} = L_1 \cup L_2 = \{x : x > 4 \text{ oder } x < \frac{1}{2}\}.$$

b) **1. Fall:**  $5x - 7 > 0$ , d.h.  $x > \frac{7}{5} = \frac{91}{65}$

Aus obiger Ungleichung folgt nun unter Beachtung von  $5x - 7 > 0$ :

$$(2x + 4) > 3(5x - 7) \implies 2x + 4 > 15x - 21 \implies x < \frac{25}{13} = \frac{125}{65}.$$

Damit erhalten wir als Lösungsmenge im 1. Fall:

$$L_1 = \{x : x > \frac{91}{65} \text{ und } x < \frac{125}{65}\} = \{x : \frac{7}{5} < x < \frac{25}{13}\}$$

**2. Fall:**  $5x - 7 < 0$ , d.h.  $x < \frac{7}{5} = \frac{91}{65}$

Aus obiger Ungleichung folgt nun:

$$(2x + 4) < 3(5x - 7) \implies 2x + 4 < 15x - 21 \implies x > \frac{25}{13} = \frac{125}{65}.$$

Damit erhalten wir als Lösungsmenge im 2. Fall:

$$L_2 = \{x : x < \frac{91}{65} \text{ und } x > \frac{125}{65}\} = \{\} \text{ (leere Menge!)}$$

Die vollständige Lösung obiger Ungleichung ist damit

$$L_{ges} = L_1 \cup L_2 = \{x : \frac{7}{5} < x < \frac{25}{13}\}.$$

**Aufgabe 4:** Bestimmen Sie graphisch den Schnittpunkt der beiden folgenden Geraden:

$$\begin{aligned} 12 - 3y + 5x &= 11y + 37 - 6x \\ y - 17 &= 9x - 27. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie auch die Steigungen beider Geraden, sowie ihre Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} 14y = 11x - 25 &\Leftrightarrow y = \frac{11}{14}x - \frac{25}{14} \\ y &= 9x - 10 \end{aligned}$$

(siehe Lösung zu Aufgabe 2!)

An der „Normalform“  $y = mx + n$  einer Geradengleichung lässt sich die Steigung ablesen:  $m$ !

Also hier:  $m_1 = \frac{11}{14}$  bzw.  $m_2 = 9$ .

Aber auch der Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse:  $x = 0 \Rightarrow y = n$ .

Also hier:

$$\begin{aligned}n_1 &= -\frac{25}{14} \Rightarrow \text{Schnittpunkt: } \left(0, -\frac{25}{14}\right), \\n_2 &= -10 \Rightarrow \text{Schnittpunkt: } (0, -10).\end{aligned}$$

Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse ergeben sich aus der Bedingung  $y = 0$ :

$$0 = y = mx + n \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{n}{m}}.$$

Also hier:

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{-25/14}{11/14} \Rightarrow \text{Schnittpunkt: } \left(\frac{25}{11}, 0\right), \\x_2 &= -\frac{(-10)}{9} = \frac{10}{9} \Rightarrow \text{Schnittpunkt: } \left(\frac{10}{9}, 0\right).\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist  $(1, -1)$ .

**Aufgabe 5:** Bestimmen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned}\text{a) } & y(x) = x^6; & \text{b) } & y(x) = \frac{1}{x^4}; \\ \text{c) } & y(x) = \sqrt{x}.\end{aligned}$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}\text{a) } & y'(x) = 6x^5; \\ \text{b) } & y'(x) = \frac{-4x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5}; \\ \text{c) } & y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Nach Definition der Ableitung gilt:

$$y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{a) } \frac{y(x+h) - y(x)}{h} &= \frac{(x+h)^6 - x^6}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left[ x^6 + 6x^5h + \binom{6}{2}x^4h^2 + \dots + \binom{6}{5}xh^5 + h^6 - x^6 \right] \\ &= 6x^5 + \underbrace{\left[ \binom{6}{2}x^4h + \binom{6}{3}x^3h^2 + \dots + \binom{6}{5}xh^4 + h^5 \right]}_{\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Beh.} \\ \text{b) } \frac{1}{h} \left( \frac{1}{(x+h)^4} - \frac{1}{x^4} \right) &= \frac{1}{h} \frac{x^4 - (x+h)^4}{x^4(x+h)^4} \\ &= \frac{1}{h} \frac{x^4 - [x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4]}{x^4[x^4 + \dots + h^4]} \\ &= \frac{-[4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3]}{x^4[x^4 + 4x^3h + \dots + h^4]} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{-4x^3}{x^8} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{h} \left( \sqrt{x+h} - \sqrt{x} \right) &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}}_{=1} \\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

**Aufgabe 6:** Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

$$\begin{aligned} \text{a) } y(x) &= x \ln x ; & \text{b) } y(x) &= \frac{x}{\sin x} ; \\ \text{c) } y(x) &= \sin^2 x ; & \text{d) } y(x) &= \frac{1}{\cos x} ; \\ \text{e) } y(x) &= \sin^2 \left( \frac{x}{2\pi} \right) + \cos^2 \left( \frac{x}{2\pi} \right) . \end{aligned}$$

**LÖSUNG:** Wir setzen die Rechenregeln für das Ableiten voraus:

- Produktregel (Leibniz),
- Quotientenregel,
- Kettenregel,

sowie die Ableitungsformeln:

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \frac{1}{x} , \\ (\sin x)' &= \cos x , \\ (\cos x)' &= -\sin x . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{a) } y'(x) &= (x \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1. \\ \text{b) } y'(x) &= \left( \frac{x}{\sin x} \right)' = \frac{1 \cdot \sin x - x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{x}{\sin x} \cdot \cot x. \\ \text{c) } y'(x) &= (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x. \\ \text{d) } y'(x) &= \left( \frac{1}{\cos x} \right)' = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \tan x. \\ \text{e) } y'(x) &\equiv 0, \text{ da } \sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{R}. \\ &\text{oder} \\ y'(x) &= 2 \sin \frac{x}{2\pi} \cdot \cos \frac{x}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} + 2 \cos \frac{x}{2\pi} \cdot \left( -\sin \frac{x}{2\pi} \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \sin \frac{x}{2\pi} \cos \frac{x}{2\pi} \cdot (1 - 1) \equiv 0! \end{aligned}$$

**Aufgabe 7:** Bestimmen Sie die Extrema der folgenden Funktionen:

$$\text{a) } y(x) = -x^2 - 4x + 1; \quad \text{b) } y(x) = Ax + \frac{B}{x} \quad \text{für } A, B > 0.$$

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2x - 4 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow &\boxed{x = -2} \\ y''(x) &= -2 < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y(x)$  hat an der Stelle  $x = -2$  ein Maximum mit dem Wert  $y(-2) = 5$ .

Beachte:

$$\begin{aligned} y(x) &= -x^2 - 4x + 1 \\ &= -(x^2 + 4x - 1) \\ &= -(x^2 + 2 \cdot 2x + 4 - 5) \\ &= -((x + 2)^2 - 5) \\ &= -(x + 2)^2 + 5 \leq 5! \end{aligned}$$

Der Punkt  $S(-2, 5)$  heißt Scheitelpunkt dieser nach unten geöffneten Normalparabel!

b)

$$\begin{aligned}y'(x) &= A - \frac{B}{x^2} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow Ax^2 = B \\&\Leftrightarrow Ax^2 - B = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{A}x + \sqrt{B})(\sqrt{A}x - \sqrt{B}) = 0 \\&\Leftrightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{B}{A}}, x_2 = \sqrt{\frac{B}{A}}.\end{aligned}$$

$$y''(x) = \frac{2B}{x^3}.$$

$$y''\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\right) = \frac{2B \cdot A^{3/2}}{B^{3/2}} = 2\frac{A^{3/2}}{B^{1/2}} = 2\sqrt{\frac{A^3}{B}} > 0.$$

$$y''\left(-\sqrt{\frac{B}{A}}\right) = -\frac{2B \cdot A^{3/2}}{B^{3/2}} = -2\sqrt{\frac{A^3}{B}} < 0.$$

$\Rightarrow y(x) = Ax + \frac{B}{x}$  hat an der Stelle  $x = -\sqrt{\frac{B}{A}}$  ein (lokales) Maximum mit dem Wert  $y\left(-\sqrt{\frac{B}{A}}\right) = -\sqrt{AB} - \sqrt{AB} = -2\sqrt{AB}$  und an der Stelle  $x = \sqrt{\frac{B}{A}}$  ein (lokales) Minimum mit dem Wert  $y\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\right) = \sqrt{AB} + \sqrt{AB} = 2\sqrt{AB}$ .

**Aufgabe 8:** Bestimmen Sie durch Polynomdivision ein quadratisches Polynom  $q(x) = ax^2 + bx + c$ , so dass gilt:

$$p(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14 = (x - 1) \cdot q(x).$$

LÖSUNG:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 6x^2 - 9x + 14) : (x - 1) = x^2 - 5x - 14 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ -5x^2 - 9x + 14 \\ \underline{-(-5x^2 + 5x)} \\ -14x + 14 \\ \underline{-(-14x + 14)} \\ 0! \end{array}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow p(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14 &= (x - 1) \cdot (x^2 - 5x - 14) \\ &= (x - 1)(x + 2)(x - 7).\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Nullstellen von } p(x) : x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 7.$$

Die Übungsblätter, Musterlösungen und das Skript in der jeweils aktuellen Fassung finden Sie auch auf der Webseite zur Vorlesung:

<http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ws17/IngMathI/>