Aufgabe 9: a) Funktioniert die Formel für die Höhenfunktion $h(d, \alpha) = d \tan\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right)$ aus der Vorlesung auch dann, wenn man direkt am Turm steht?

b) Wie verhält sich die Sensitivität bezüglich Abweichungen in d und α, wenn man sehr nah am Turm steht?

c) Wie verhält sich die Sensitivität bezüglich Abweichungen in α, wenn man sehr weit entfernt steht?

LÖSUNG:

a) Steht man direkt am Turm, so ist $d = 0$ und $\alpha = 90$. Da

$$h(0, 90) = 0 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \infty,$$

funktioniert die Formel für die Höhenfunktion in diesem Fall nicht.

b) Die Sensitivität einer Funktion wird durch den Betrag ihrer Ableitung wiedergespiegelt. Je höher der Betrag der Ableitung ist, desto höher ist die Sensitivität in diesem Punkt. Wir müssen also überprüfen, wie sich die Ableitung betragsmäßig verhält. Es gilt:

$$\frac{dh}{dd} = \tan\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right), \qquad \frac{dh}{d\alpha} = \frac{d\pi}{180\cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{180}\right)}$$

Steht man nun nah am Turm, so ist α nur wenig kleiner als 90°, d.h. $\frac{dh}{dd}$ ist sehr groß, denn für $x < \frac{\pi}{2}$, $x \to \frac{\pi}{2}$ gilt $\tan(x) \to \infty$. Mit anderen Worten, die Sensitivität bzgl. Abweichungen in d ist sehr groß. Außerdem gilt für $x < \frac{\pi}{2}$, $x \to \frac{\pi}{2}$ $\cos(x) \to 0$, so dass die Sensitivität bzgl. Abweichungen in α ebenfalls sehr groß ist.

c) Steht man sehr weit entfernt vom Turm, so ist d sehr groß und α sehr klein (fast null). Da für $x \to 0$ $\cos(x) \to 1$ gilt, d jedoch sehr groß ist, ist die Sensitivität bzgl. Abweichungen in α groß.

Aufgabe 10: a) Skizzieren Sie zuerst den Graphen der folgenden Funktion und schreiben Sie die Funktion ohne Betragsfunktion mit Fallunterscheidung:

$$f(x) := x + |x|$$

b) Skizzieren Sie nun den Graph der Funktion

$$g(x) := \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & : \quad x > 1 \end{cases}$$

und schreiben Sie die Funktion unter Verwendung der Betragsfunktion ohne Fallunterscheidung.

c) Skizzieren Sie den Graphen der folgenden Funktion und schreiben Sie auch diese unter Verwendung der Betragsfunktion ohne Fallunterscheidung:

$$h(x) := \begin{cases} 0 & : \quad x < -1 \\ 2x + 2 & : \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 2 & : \quad x \geq 0 \end{cases}$$

LÖSUNG:

a) $f(x) = x + |x| = x + \left\{ \begin{array}{rcl} x & : & x > 0 \\ -x & : & x \leq 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{rcl} 2x & : & x > 0 \\ 0 & : & x \leq 0 \end{array} \right.$

b) Im Gegenssatz zu der Funktion aus dem Aufgabenteil a) ist die Funktion $g(x)$ auf der x-Achse um eins nach rechts verschoben und zusätzlich mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ skaliert. Daher gilt
$g(x) := \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & : & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & : & x > 1 \end{array} \right. = \frac{1}{4}\left(x - 1 + |x-1|\right)$

c) Um die Funktion $h(x)$ umzuschreiben betrachten wir zunächst die Funktion

$$h_1(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & : & x < -1 \\ 2x+2 & : & x \geq -1 \end{array} \right. ,$$

die für $x \leq 0$ mit der Funtion $h(x)$ übereinstimmt. $h_1(x)$ läßt sich ähnlich wie die Funktion $g(x)$ durch Verschiebung von $f(x)$ konstruieren. Es gilt also

$$h_1(x) = x + 1 + |x+1|.$$

Um den zweiten Knick zu konstruieren addieren wir ein Vielfaches der Funktion $f(x)$ zu $h_1(x)$. Da $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ ändert dies nichts am Verhalten von $h_1(x)$ für $x \leq 0$. Wählen wir als Faktor -1, so ändert sich aber die Steigung für $x > 0$ von 2 auf 0, da die Steigung von $f(x)$ für $x > 0$ gleich 2 ist. Die Funktion $h(x)$ läßt sich also schreiben als

$$\begin{aligned} h(x) &= g_1(x) + (-1) \cdot f(x) \\ &= x + 1 + |x+1| - (x + |x|) \\ &= 1 + |x+1| - |x| \end{aligned}$$

Aufgabe 11: Bestimmen Sie das quadratische Polynom, auf dessen Graph die Punkte $(-1, 0)$, $(1, 2)$ und $(-2, -7)$ liegen.

LÖSUNG: Die Lösung lautet:

$$p(x) = -2x^2 + x + 3\,.$$

Probe:

$$\begin{array}{rcl} p(-1) & = & (-2) \cdot 1 + (-1) + 3 = -2 - 1 + 3 = 0 \quad \checkmark \\ p(1) & = & -2 + 1 + 3 = -2 + 4 = 2 \quad \checkmark \\ p(-2) & = & (-2) \cdot 4 + (-2) + 3 = -8 - 2 + 3 = -10 + 3 = -7 \quad \checkmark \end{array}$$

Wie findet man die Lösung?
Ansatz: $p(x) = ax^2 + bx + c$
Bedingungen:

$$\begin{array}{lrl} 1) & 0 = p(-1) = & a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c \\ 2) & 2 = p(1) \;\; = & a + b + c \\ 3) & -7 = p(-2) = & 4a - 2b + c \end{array}$$

Lineares Gleichungssystem:

I:	a	$-$	b	$+$	c	$=$	0
II:	a	$+$	b	$+$	c	$=$	2
III:	$4a$	$-$	$2b$	$+$	c	$=$	-7
I'=I:	a	$-$	b	$+$	c	$=$	0
II'=II+I:	$2a$			$+$	$2c$	$=$	2
III'=III+2II	$6a$			$+$	$3c$	$=$	-3
I''=I':	a	$-$	b	$+$	c	$=$	0
II''=$\frac{1}{2}$II':	a			$+$	c	$=$	1
III''=$\frac{1}{3}$III':	$2a$			$+$	c	$=$	-1
I'''=I'':	a	$-$	b	$+$	c	$=$	0
II'''=II'':	a			$+$	c	$=$	1
III'''=III''-II'':	a					$=$	-2

$$a = -2 \;\Rightarrow\; c = 1 - a = 1 + 2 = 3 \;\Rightarrow\; b = a + c = -2 + 3 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = -2x^2 + x + 3}$$

Aufgabe 12: Betrachten Sie die Bewegungsgleichung eines Federpendels, wie in der Vorlesung behandelt:

$$m\ddot{y}(t) = -\mu y(t)\,. \tag{1}$$

Nehmen Sie an, dass sich die Kugel des Pendels zur Anfangszeit $t_0 = 0$ in der Höhe $y(0) = 0$ befindet und ihre Anfangsgeschwindigkeit $\dot{y}(0) = v_0$ beträgt.
Geben Sie eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (1) an.

Lösung: Zunächst stellen wir fest, dass

$$\sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1 \text{ und } \frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t)\,.$$

Da $y(0) = 0$ gelten soll, setzen wir analog zur Vorlesung

$$y(t) = c\sin\left(\sqrt{\frac{\mu}{m}}t\right) ,$$

wobei c noch zu bestimmen ist. Hierzu berechnen wir die erste Ableitung

$$\dot{y}(t) = c\sqrt{\frac{\mu}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{\mu}{m}}t\right) \stackrel{!}{=} v_0$$

und stellen fest, dass $c = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{\mu}{m}}}$ gelten muss.
Somit erfüllt

$$y(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{\mu}{m}}}\sin\left(\sqrt{\frac{\mu}{m}}t\right)$$

die Anfangsbedingungen und da

$$\ddot{y}(t) = -\frac{v_0}{\sqrt{\frac{\mu}{m}}}\sin\left(\sqrt{\frac{\mu}{m}}t\right)\frac{\mu}{m}$$

gilt, löst dieses $y(t)$ die gewöhnlichen Differentialgleichung (1).

Aufgabe 13: Gegeben seien die Aussagen

$$A(s) = \text{StudentIn } s \text{ schläft morgens aus.}$$
$$B(s) = \text{StudentIn } s \text{ gibt einen gut bearbeiteten Übungszettel ab.}$$

und die logische Aussage

$$\forall s\,(A(s) \vee B(s)) \ . \tag{2}$$

a) Formulieren Sie die Negation von Aussage (2).

b) Geben Sie eine sprachliche Formulierung von Aussage (2) und ihrer Negation an (analog zur rechten Seite der Definitionen der Aussagen $A(s)$ und $B(s)$).

LÖSUNG:

a) Die Negation von Aussage (2) ist

$$\exists s\,(\neg A(s) \wedge \neg B(s)) \ .$$

b) Eine mögliche Formulierung von Aussage (2) lautet: *"Alle StudentInnen schlafen morgens aus oder geben einen gut bearbeiteten Übungszettel ab."*

Eine mögliche Formulierung der Negation lautet: *"Es existiert eine Studentin/ein Student, die/der morgens nicht ausschläft und keinen gut bearbeiteten Übungszettel abgibt."*