Aufgabe 14: Vereinfachen Sie die folgenden Summen:

a)

$$\sum_{i=1}^{10} (a_i - a_{i+1}),$$

b)

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^5 a_{i,2j}.$$

LÖSUNG:

a) $\sum_{i=1}^{10} (a_i - a_{i+1}) = \sum_{i=1}^{10} a_i - \sum_{i=1}^{10} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{10} a_i - \sum_{i=2}^{11} a_i = a_1 - a_{11}$

b)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^5 a_{i,2j} &= \sum_{i=1}^{10} \left(\sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{j=1}^5 a_{i,2j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{10} \left(\sum_{j=1}^5 a_{i,2j-1} \right) \end{aligned}$$

Aufgabe 15: Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

a) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) ;$

b) $n! \geq 2^{n-1}.$

LÖSUNG:

Zu a)

(IA): $n = 1:$

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = \frac{1}{6}1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \checkmark.$$

(IAN): $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}.$

(IS): $n \rightsquigarrow n+1:$

Beh.:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

Bew.:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1) \cdot (n(2n+1) + 6(n+1)) \\ &= \frac{1}{6}(n+1) \cdot (2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \quad \checkmark.\end{aligned}$$

Zu b)

(IA): Für $n = 1$:

$$1! = 1 \geq 1 = 2^0 \quad \checkmark.$$

(IAN): $n! \geq 2^{n-1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(IS): $n \rightsquigarrow n+1$:

Beh.:

$$(n+1)! \geq 2^n$$

Bew.:

Es gilt

$$(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Aufgabe 16: Die Zahlenfolge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + 2n + 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Man gebe eine explizite Formel für das allgemeine Glied der Folge an und beweise diese Formel!

LÖSUNG: Die Lösung ist

$$a_n = (n+1)^2.$$

Wir beweisen dies mit vollständiger Induktion über n .

a) Induktionsanfang (IA): Für $n = 0$ ist die Formel richtig:

$$a_0 = (0+1)^2 = 1$$

Induktionsannahme (IAN): Die Formel

$$a_n = (n+1)^2$$

sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$

Beh.: Die Formel ist richtig für $n+1 \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = (n+2)^2$$

Bew.:

$$a_{n+1} = a_n + 2(n+1) + 1 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.$$

Also gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Aufgabe 17: Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

a) $a_n := \frac{-7n^2+3n-1}{5n^2+5}$;

b) $a_n := \frac{3n^3+n-2}{(2n+\sqrt{n})^3}$;

c) $a_n := (1 + \frac{1}{n^2})^n$;

Tip: Wenden Sie die Bernoullische Ungleichung einmal auf a_n und einmal auf $\frac{1}{a_n}$ an und zeigen Sie damit, dass

$$a_n \geq 1 + \frac{1}{n}$$

und

$$a_n \leq 1 + \frac{n}{n^2 - n + 1}$$

gelten.

Berechnen Sie die Grenzwerte dieser beiden Folgen.

LÖSUNG:

a)

$$a_n = \frac{-7n^2 + 3n - 1}{5n^2 + 5} = \frac{n^2(-7 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2})}{n^2(5 + \frac{5}{n^2})} = \frac{-7 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{5}{n^2}} \rightarrow -\frac{7}{5}$$

für $n \rightarrow +\infty$, da $\frac{3}{n}, -\frac{1}{n^2}, \frac{5}{n^2} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow +\infty$.

b)

$$a_n = \frac{n^3(3 + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3})}{n^3(2 + \frac{1}{\sqrt{n}})^3} = \frac{3 + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}}{(2 + \frac{1}{\sqrt{n}})^3} \rightarrow \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$$

für $n \rightarrow +\infty$, da $\frac{1}{n^2}, -\frac{2}{n^3}, \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow +\infty$.

c) Beh.: $a_n = (1 + \frac{1}{n^2})^n \rightarrow 1$ für $n \rightarrow +\infty$.

Beweis: Wegen der Bernoulli-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= (1 + \frac{1}{n^2})^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{(1 + \frac{1}{n^2})^n} = \frac{1}{(\frac{n^2+1}{n^2})^n} = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n \\ &= \left(\frac{n^2+1-1}{n^2+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2+1}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2-n+1}{n^2+1} \\ \Rightarrow a_n &\leq \frac{n^2+1}{n^2-n+1} = \frac{n^2-n+1+n}{n^2-n+1} = 1 + \frac{n}{n^2-n+1} \end{aligned}$$

D.h. also : $a_n = (1 + 1/n^2)^n \rightarrow 1$ für $n \rightarrow +\infty$, da sowohl $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ als auch $1 + \frac{n}{n^2-n+1} \rightarrow 1$.