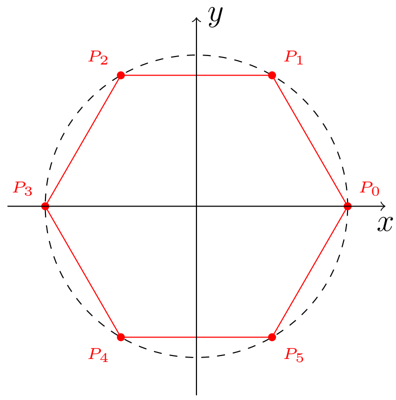
Aufgabe 18: Betrachten Sie die nachstehende Abbildung mit den Punkten $P_0 = (1,0)$ und $P_1 = (a, \sqrt{1-a^2})$ wobei $a \in (0,1)$.



a) Nehmen wir an, dass die Punkte P_0, ..., P_5 ein symmetrisches Hexagon (Sechseck) bilden, d.h. symmetrisch bzgl. x- und y-Achse verteilt sind. Geben Sie die Koordinaten der Punkte P_2, ..., P_5 an.

b) Unter Verwendung der Teilaufgabe a), bestimmen Sie nun den Flächeninhalt des Hexagons in Abhängigkeit des Parameters $a \in (0,1)$, d.h. bestimmen Sie eine Funktion $F(a)$ mit der Sie den Flächeninhalt berechnen können. (Tipp: Nutzen Sie die Gaußsche Flächenformel aus der Vorlesung.)

c) Bestimmen Sie nun das Hexagon mit dem größten Flächeninhalt.

Aufgabe 19: Für ein $a > 0$ sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Vorschrift

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \tag{1}$$

definiert. Außerdem sei der Startwert $x_0 > 0$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ die Ungleichung $x_n^2 \geq a$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ die Ungleichung $x_{n+1} \leq x_n$ gilt.
Tipp: Zeigen Sie die äquivalente Ungleichung $x_{n+1} - x_n \leq 0$.

c) Warum konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
Tipp: Verwenden Sie Satz 1.44 aus der Vorlesung.

d) Zeigen Sie, dass für den Grenzwert x der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: $x^2 = a$, d. h. $x = \sqrt{a}$.
Tipp: Betrachten Sie auf beiden Seiten von (1) den Grenzwert.

Aufgabe 20: Für das Polynom $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$ berechne man mittels Horner-Schema den Wert $p(-1)$ sowie die Zerlegung in Linearfaktoren. Welches sind die Nullstellen von p?