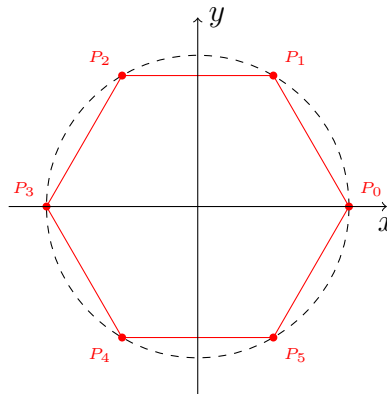


Aufgabe 18: Betrachten Sie die nachstehende Abbildung mit den Punkten $P_0 = (1, 0)$ und $P_1 = (a, \sqrt{1-a^2})$ wobei $a \in (0, 1)$.



- Nehmen wir an, dass die Punkte $P_0, \dots, P_5$ ein symmetrisches Hexagon (Sechseck) bilden, d.h. symmetrisch bzgl. x - und y -Achse verteilt sind. Geben Sie die Koordinaten der Punkte $P_2, \dots, P_5$ an.
- Unter Verwendung der Teilaufgabe a), bestimmen Sie nun den Flächeninhalt des Hexagons in Abhängigkeit des Parameters $a \in (0, 1)$, d.h. bestimmen Sie eine Funktion $F(a)$ mit der Sie den Flächeninhalt berechnen können. (Tipp: Nutzen Sie die Gaußsche Flächenformel aus der Vorlesung.)
- Bestimmen Sie nun das Hexagon mit dem größten Flächeninhalt.

LÖSUNG:

- Die Lösung erhalten wir durch Spiegeln der Punkte P_0 und P_1 an der x - bzw. y -Achse. Spiegeln wir den Punkt P_0 an der y -Achse, so erhalten wir den Punkt $P_3 = (-1, 0)$. Nun spiegeln wir P_1 an der y -Achse und erhalten $P_2 = (-a, \sqrt{1-a^2})$. Durch erneute Spiegelung an der x -Achse erhalten wir $P_5 = (a, -\sqrt{1-a^2})$. Zum Schluss spiegeln wir nun noch P_1 an der x - und y -Achse und erhalten $P_4 = (-a, -\sqrt{1-a^2})$.
- Wir erinnern uns an die Gaußsche Flächenformel aus der Vorlesung. Für ein Polygon bestehend aus $n+1$ -Punkte berechnen wir den Flächeninhalt durch

$$F := \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (x_{k-1} - x_{k+1}) y_k,$$

wobei $P_k = (x_k, y_k)$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} F(a) &= \frac{1}{2} \left[0 + (1 - (-a)) \cdot \sqrt{1-a^2} + (a - (-1)) \cdot \sqrt{1-a^2} \right. \\ &\quad \left. + 0 + (-1 - a) \cdot (-\sqrt{1-a^2}) + (-a - 1) \cdot (-\sqrt{1-a^2}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(4 \cdot (1+a) \sqrt{1-a^2} \right) \\ &= 2 \cdot (1+a) \sqrt{1-a^2} \end{aligned}$$

- c) Da der Flächeninhalt in diesem Fall nur vom Parameter a abhängt, können wir das maximale Hexagon durch Berechnung des Extremums von $F(a)$ berechnen:

$$F'(a) = 2 \cdot \sqrt{1-a^2} + 2 \cdot (1+a) \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}} \stackrel{!}{=} 0.$$

Durch Umstellen erhalten wir

$$a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} = 0.$$

Berechnung der Nullstellen der quadratischen Gleichung:

$$a_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}.$$

Des Weiteren gilt

$$F''(a) = -\frac{2+6a}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{2 \cdot (a^2 + a^3)}{(\sqrt{1-a^2})^3}$$

und damit

$$F''\left(\frac{1}{2}\right) < 0,$$

d.h. für $a = \frac{1}{2}$ ist das resultierende Hexagon wirklich Flächeninhalt maximierend.

Das resultierende Hexagon ist zu dem gleichseitig und gleichwinklig (120°).

Aufgabe 19: Für ein $a > 0$ sei die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch die Vorschrift

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (1)$$

definiert. Außerdem sei der Startwert $x_0 > 0$.

- Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ die Ungleichung $x_n^2 \geq a$ gilt.
- Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ die Ungleichung $x_{n+1} \leq x_n$ gilt.
Tipp: Zeigen Sie die äquivalente Ungleichung $x_{n+1} - x_n \leq 0$.
- Warum konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
Tipp: Verwenden Sie Satz 1.44 aus der Vorlesung.
- Zeigen Sie, dass für den Grenzwert x der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt: $x^2 = a$,
d. h. $x = \sqrt{a}$.
Tipp: Betrachten Sie auf beiden Seiten von (1) den Grenzwert.

LÖSUNG:

- a) Es gilt

$$x_n^2 - a = \frac{1}{4} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right)^2 - a = \frac{1}{4} \left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}} \right)^2 \geq 0.$$

b) Wir rechnen nach:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x_n} - x_n \right) = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0.$$

Die letzte Ungleichung folgt mit Hilfe von Aufgabenteil a).

c) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist für $n \geq 1$ monoton und beschränkt. Nach Satz 1.44 aus der Vorlesung ist sie somit konvergent.

d) Gehen wir auf beiden Seiten von (1) zum Grenzwert über, so erhalten wir die Gleichung

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right).$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit x ergibt sich

$$x^2 = \frac{1}{2} (x^2 + a) \Leftrightarrow x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}.$$

Aufgabe 20: Für das Polynom $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$ berechne man mittels HORNER-Schema den Wert $p(-1)$ sowie die Zerlegung in Linearfaktoren. Welches sind die Nullstellen von p ?

LÖSUNG: Wir werten das Polynom

$$p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$$

an der Stelle $x_0 = -1$ mit dem Hornerschema aus:

$$\begin{array}{rrrr} 2 & -4 & -10 & 12 \\ & -2 & 6 & 4 \\ \hline 2 & -6 & -4 & | & 16 \end{array}$$

Wir erhalten somit

$$p(x) = (x + 1)(2x^2 - 6x - 4) + 16$$

und damit $p(-1) = 16$.

Eine Nullstelle $x = 1$ sieht man mit Hingucken. Hornerschema mit $x = 1$ ergibt dann

$$\begin{array}{rrrr} 2 & -4 & -10 & 12 \\ & 2 & -2 & -12 \\ \hline 2 & -2 & -12 & | & 0 \end{array}$$

und folglich $2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = (x - 1)(2x^2 - 2x - 12)$. Die Nullstellen von $2x^2 - 2x - 12$ sind die Nullstellen von $x^2 - x - 6$ und damit

$$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

Damit gilt $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$. Es folgt also

$$p(x) = 2(x - 1)(x - 3)(x + 2)$$