Aufgabe 21: Zeigen Sie, daß eine nichtleere, beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ ein Infimum hat, indem Sie wie folgt vorgehen:

a) Definieren Sie eine Intervallschachtelung $([k_i, x_i])_{i \in \mathbb{N}}$ mit $[k_{i+1}, x_{i+1}] \subset [k_i, x_i]$ für das Infimum.

b) Zeigen Sie, dass die Folgen $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergieren.

c) Zeigen Sie, dass beide gegen denselben Grenzwert konvergieren.

d) Zeigen Sie, dass dieser Grenzwert das Infimum von M ist.

Aufgabe 22: Welche der folgenden Funktionen lassen sich an der Stelle $x = 1$ stetig ergänzen, welcher Funktionswert ergibt sich:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$, b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$,

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 5}{(x - 1)^2}$, d) $k(x) = \dfrac{2x - 2}{|2x - 2|}$.

Aufgabe 23: Zeigen Sie, daß jedes Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle hat.
Tipp: Benutzen Sie den Zwischenwertsatz!

Aufgabe 24: Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Mengen:

a) $A = \{x \mid -2 < x \leq 5\}$,

b) $B = \{x \mid x^2 < 5\}$,

c) $C = \{x \mid 3 \leq 2x + 5 \leq 8\}$.

Welche Mengen haben ein Maximum bzw. ein Minimum? Schreiben Sie die Mengen jeweils als Intervall.