Aufgabe 21: Zeigen Sie, daß eine nichtleere, beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ ein Infimum hat, indem Sie wie folgt vorgehen:

a) Definieren Sie eine Intervallschachtelung $([k_i, x_i])_{i\in\mathbb{N}}$ mit $[k_{i+1}, x_{i+1}] \subset [k_i, x_i]$ für das Infimum.

b) Zeigen Sie, dass die Folgen $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

c) Zeigen Sie, dass beide gegen denselben Grenzwert konvergieren.

d) Zeigen Sie, dass dieser Grenzwert das Infimum von M ist.

LÖSUNG:

a) Sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach unten beschränkt. Dann gibt es ein $x_0 \in M$ und eine untere Schranke k_0 von M.

Setze $I_0 := [k_0, x_0]$ und $M_0 := \frac{k_0+x_0}{2}$ die Mitte des Intervalles I_0.

<u>Fall 1:</u> $M \cap [k_0, M_0) = \varnothing$

Dann ist M_0 eine untere Schranke von M.

Wir definieren dann $x_1 := x_0$ und $k_1 := M_0$.

<u>Fall 2:</u> $M \cap [k_0, M_0[\neq \varnothing$

Dann gibt es einen Punkt $x_1 \in M$ mit $x_1 < M_0$. In diesem Fall setzen wir $k_1 := k_0$.

Wir erhalten also ein Intervall $I_1 = [k_1, x_1]$ mit den Eigenschaften:

i) $[k_0, x_0] \supset [k_1, x_1]$,

ii) $x_1 \in M$,

iii) k_1 ist untere Schranke von M,

iv) $x_1 - k_1 \leq \frac{1}{2}(x_0 - k_0)$.

Dieses Verfahren wiederholen wir nun mit dem Intervall $I_1 = [k_1, x_1]$ und $M_1 = \frac{k_1+x_1}{2}$ an Stelle von I_0 und M_0 und setzen diese Vorgehensweise fort.

Wir erhalten auf diese Weise induktiv eine Intervallschachtelung:

$$I_0 = [k_0, x_0] \supset [k_1, x_1] = I_1 \supset [k_2, x_2] = I_2 \supset \ldots \supset [k_n, x_n] = I_n \supset \ldots$$

mit den Eigenschaften:

(1) $x_n \in M$,

(2) k_n ist untere Schranke von M,

(3) $0 \leq x_n - k_n \leq \frac{1}{2^n}(x_0 - k_0)$.

b) Schauen wir uns die Folgen $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ näher an, so stellen wir fest, dass die Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Gleichzeitig gilt stets $k_n \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt die Konvergenz der Folgen $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Aus Aufgabenteil *b*) wissen wir bereits, dass die Folgen $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Sei nun k der Grenzwert der Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\overline{x}$ der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. In Aufgabenteil *a*) haben wir festgestellt, dass folgende Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} & 0 \leq x_n - k_n \leq \frac{1}{2^n}(x_0 - k_0) \\ \Leftrightarrow \quad & k_n \leq x_n \leq k_n + \frac{1}{2^n}(x_0 - k_0) \end{aligned}$$

Betrachten wir nun das Verhalten für $n \to \infty$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & k \leq \overline{x} \leq k + 0 \\ \Rightarrow \quad & k = \overline{x} \end{aligned}$$

D.h. beide Folgen konvergieren gegen denselben Grenzwert.

d) Es bleibt zu zeigen, dass k das Infimum von M, also die grösste untere Schranke von M ist.

Nach Konstruktion gilt:

i) Für jedes $x \in M$ ist $x \geq k_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
$\Rightarrow \quad x \geq k$ durch Grenzübergang.
Also ist k eine untere Schranke von M.

ii) Sei $\overline{k}$ eine weitere untere Schranke von M.
Annahme: $\overline{k} > k$.
$\Leftrightarrow \quad \overline{k} - k > 0$
Aus Aufgabenteil *a*) wissen wir bereits, dass

$$x_n - k_n \leq \frac{1}{2^n}(x_0 - k_0)$$

wählen wir nun n groß genug, so kann man $x_n - k_n$ wie folgt weiter abschätzen:

$$x_n - k_n \leq \frac{1}{2^n}(x_0 - k_0) < \overline{k} - k \leq \overline{k} - k_n.$$

$\Rightarrow \quad x_n < \overline{k}$ Widerspruch dazu, dass k untere Schranke von M ist.
$\Rightarrow \quad \overline{k} \leq k$, d.h. k ist grösste untere Schranke von M. $\square$

Bemerkung: Der Beweis dafür, dass jede nichtleere, beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ ein Supremum hat, kann anaolg geführt werden.

Aufgabe 22: Welche der folgenden Funktionen lassen sich an der Stelle $x = 1$ stetig ergänzen, welcher Funktionswert ergibt sich:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, \qquad \text{b) } g(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1},$$

$$\text{c) } h(x) = \frac{x^2 - 5}{(x-1)^2}, \qquad \text{d) } k(x) = \frac{2x - 2}{|2x - 2|}.$$

LÖSUNG:

a) Es gilt:

$$x^2 - 3\,x + 2 = (x-1)\,(x-2)$$

und daher

$$\frac{x^2 - 3\,x + 2}{x-1} \overset{x \neq 1}{=} x - 2 \to -1 \quad \text{für} \ \ x \to 1.$$

Also ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 1$ stetig ergänzbar mit dem Funktionswert

$$f(1) := -1!$$

b) Wir beachten, dass

$$x - 1 = \left(\sqrt{x} - 1\right)\,\left(\sqrt{x} + 1\right)$$

gilt und erhalten daher

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x-1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)\,(\sqrt{x} + 1)} \overset{x \neq 1}{=} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \quad \to \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{für} \ \ x \to 1.$$

Also ist die Funktion $g(x)$ an der Stelle $x = 1$ stetig ergänzbar mit dem Funktionswert

$$g(1) := \frac{1}{2}.$$

c) Hier gilt:

$$\frac{x^2 - 5}{(x-1)^2} = \frac{x - \sqrt{5}}{x - 1} \cdot \frac{x + \sqrt{5}}{x - 1}.$$

Für $x \downarrow 1$ (z.B. für die Folge $x_n := 1 + \frac{1}{n}$) ergibt sich:

$$\frac{x - \sqrt{5}}{x - 1} \to -\infty \tag{1}$$

$$\frac{x + \sqrt{5}}{x - 1} \to +\infty, \tag{2}$$

(1) und (2) ergeben zusammen

$$\frac{x^2 - 5}{(x-1)^2} \quad \to -\infty \quad \text{für} \ \ x \downarrow 1.$$

Für $x \uparrow 1$ (z.B. für die Folge $x_n := 1 - \frac{1}{n}$) ergibt sich dagegen:

$$\frac{x - \sqrt{5}}{x - 1} \to +\infty \tag{3}$$

$$\frac{x + \sqrt{5}}{x - 1} \to -\infty, \tag{4}$$

(3) und (4) ergeben zusammen

$$\frac{x^2 - 5}{(x-1)^2} \quad \to -\infty \quad \text{für} \ \ x \uparrow 1.$$

Also ist die Funktion $h(x)$ an der Stelle $x = 1$ <u>nicht</u> stetig ergänzbar. Als Funktionswert ergäbe sich (die Formel ist formal, d.h. symbolisch zu verstehen):

$$h(1) = \frac{-4}{0} = -\infty.$$

Man sagt, die Funktion $h(x)$ besitzt an der Stelle $x = 1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

d) Die Funktion $k(x) = \dfrac{2x-2}{|2x-2|} = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \text{für } x \geq 1 \\ -1 & \text{für } x < 1 \end{array} \right\}$ ist stetig für $x \neq 1$ und hat an der Stelle $x = 1$ eine Sprungstelle mit einem Sprung der Höhe 2 von -1 auf $+1$ als Unstetigkeit. Sie ist an der Stelle $x = 1$ also nicht stetig ergänzbar. $\rightarrow$ Skizze anfertigen!

Aufgabe 23: Zeigen Sie, daß jedes Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle hat.
Tipp: Benutzen Sie den Zwischenwertsatz!

LÖSUNG: O.B.d.A. sei unser Polynom

$$p(x) = x^{2n+1} + c_{2n}x^{2n} + \ldots + c_1 x + c_0$$

normiert.
Da $p(x) = x^{2n+1}\left[1 + \dfrac{c_{2n}}{x} + \ldots + \dfrac{c_1}{x^{2n}} + \dfrac{c_0}{x^{2n+1}}\right]$

$$\Rightarrow\ p(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \rightarrow +\infty & : & x \rightarrow +\infty \\ \rightarrow -\infty & : & x \rightarrow -\infty \end{array} \right.$$

Man kann daher Stellen $a < b$ finden mit $p(a) < 0$ und $p(b) > 0$.
Deshalb gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $p(x_0) = 0$ nach dem Zwischenwertsatz, da $p(x)$ stetig ist!

Bemerkung: Die Lösung der Aufgaben ist hier zu Ende. Man kann zusätzlich ein konkretes $b < \infty$ angeben, für das gilt $p(b) > 0$. Dazu gehen wir wie folgt vor:

Für $x \geq \max(1, 2\left(\sum_{\nu=0}^{2n} |c_\nu|\right)) \geq 1 > 0$ gilt:

$$\widetilde{p}(x) = c_{2n}x^{2n} + \ldots + c_0$$

$$|\widetilde{p}(x)| \overset{x\geq 1}{\leq} \left(\frac{1}{x}|c_{2n} + \ldots + c_0|\right) x^{2n+1} \overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \left(\frac{1}{x}\sum_{\nu=0}^{2n} |c_\nu|\right) x^{2n+1}$$

Da $x \geq 1$ und gleichzeitig $x \geq 2\left(\sum_{\nu=0}^{2n} |c_\nu|\right)$, kann man $|\widetilde{p}(x)|$ schließlich wie folgt abschätzen:

$$|\widetilde{p}(x)| \leq \frac{1}{2}x^{2n+1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(x) = x^{2n+1} + \widetilde{p}(x) &\geq x^{2n+1} - \frac{1}{2}x^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}x^{2n+1} \geq 1/2 > 0\,. \end{aligned}$$

Also kann man $b = \max(1, 2\left(\sum_{\nu=0}^{2n} |c_\nu|\right))$ wählen.
Entsprechend findet man ein a mit $p(a) < 0$!

Aufgabe 24: Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Mengen:

a) $A = \{x \mid -2 < x \leq 5\}$,

b) $B = \{x \mid x^2 < 5\}$,

c) $C = \{x \mid 3 \leq 2x + 5 \leq 8\}$.

Welche Mengen haben ein Maximum bzw. ein Minimum? Schreiben Sie die Mengen jeweils als Intervall.

LÖSUNG:

a) Für die Menge $A = \{x \mid -2 < x \leq 5\}$ gilt:

$$\sup A = 5 = \max A$$

und

$$\inf A = -2,$$

aber -2 ist kein Minimum von A. Zur Begründung beachten wir, dass nach Definition der Menge A gilt:

$$x \leq 5 \quad \text{für alle } x \in A.$$

D. h. 5 ist obere Schranke von A. Ausserdem gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in A$ derart, dass

$$5 - \varepsilon \leq x \leq 5.$$

Denn wir können ja zum Beispiel $x = 5 - \frac{\varepsilon}{2} \in A$ wählen, um die gewünschte Ungleichung zu erhalten. Also ist 5 kleinste obere Schranke von A. Da $5 \in A$, gilt demnach sogar

$$\max A = 5 = \sup A.$$

Entsprechend sieht man die Aussage für -2 ein:

- -2 ist untere Schranke von A nach Definition von A.
- -2 ist grösste untere Schranke von A, da es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in A$ gibt derart, dass
  $$-2 < x < -2 + \varepsilon.$$
  Wähle z. B. $x = -2 + \frac{\varepsilon}{2}$.
- -2 ist kein Minimum von A, weil $-2 \notin A$.

$$A = (-2, 5]$$

b) Für die Menge $B = \{x \mid x^2 < 5\}$ gilt:

$$\sup B = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad \inf B = -\sqrt{5},$$

aber $\sqrt{5}$ ist kein Maximum von B, weil $\sqrt{5} \notin B$. Entsprechend ist $-\sqrt{5}$ kein Minimum von B, weil $-\sqrt{5} \notin B$. Dazu beachten wir, dass gilt:

$$B = \{x \mid x^2 < 5\} = \{x \mid -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\}$$

und benutzen die gleiche Argumentation wie in a)!

$$B = \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$$

c) Für die Menge $C = \{x \mid 3 \leq 2x + 5 \leq 8\}$ gilt schliesslich:

$$\sup C = \max C = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \inf C = \min C = -1.$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned} 3 \leq 2x + 5 \leq 8 \;&\Leftrightarrow\; 0 \leq 2x + 2 \leq 5 \\ \Leftrightarrow\; -2 \leq 2x \leq 3 \;&\Leftrightarrow\; -1 \leq x \leq \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

woraus mit der Argumentation von a) die Behauptung folgt.

$$C = \left[-1, \frac{3}{2}\right]$$