**Aufgabe 25:** Berechnen Sie die ersten Ableitungen:

a) $p(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$ , b) $q(u) = (u^2 - 5)^8$ ,
c) $r(z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2+1}}$ , d) $e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ .

**Aufgabe 26:** Wie muss $a$ gewählt werden, damit gilt:

$$(2+h)^3 = 2^3 + ah + o(h) \quad \text{mit} \quad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0\,?$$

**Aufgabe 27:** a) Bestimmen Sie die drei lokalen Maxima und die zwei lokalen Minima der Funktion

$$W(x) = (x^2 - 1)^2$$

auf dem Intervall $[-2, 2]$.
b) Welche lokalen Extrema ergeben sich für die Funktion

$$f(x) = |x^2 - 2x| \ ?$$

Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion!

**Aufgabe 28:** Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und ihre Ableitung $f'$ sei stetig.

i) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x)\,.$$

ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus i), dass auch

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

gilt.

**Tipp:** Addieren Sie im Zähler $0 = -f(x) + f(x)$.

**Bemerkung**: Der Differenzenquotient aus i) wird als Rückwärtsdifferenzenquotient bezeichnet, der aus ii) $(\Delta_{2h}f)(x) := \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ als zentraler oder symmetrischer Differenzenquotient von $f$. Für stetig differenzierbare Funktionen gilt also, dass die Ableitung auch durch den Rückwärts- und den zentralen Differenzenquotienten approximiert wird.