Aufgabe 25: Berechnen Sie die ersten Ableitungen:

a) $p(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$, b) $q(u) = (u^2 - 5)^8$,
c) $r(z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2+1}}$, d) $e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

LÖSUNG:

a)

$$p'(x) \quad = \quad 4x^3 - 18x + 4$$

Denn: $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und differenzierbare Funktionen f und g.

b)

$$q'(x) = [(x^2 - 5)^8]' = 8(x^2 - 5)^7 \cdot 2x = 16x(x^2 - 5)^7$$

nach der Kettenregel: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ und den Regeln in a)!

c)

$$\begin{aligned}
r'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)' &= \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)' \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1} \quad \text{(Quotientenregel!)} \\
&= \frac{1}{x^2+1} \cdot \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right\} \\
&= \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{x \cdot (x^2+1) - (x^2-1) \cdot x}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{x^3 + x - x^3 + x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{2x}{(x^2+1)^{3/2}\sqrt{x^2-1}} .
\end{aligned}$$

Benutzt:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2-1}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} , \quad \text{(Kettenregel!)} \\
\left(\sqrt{x^2+1}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} , \\
\left(\sqrt{x}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} .
\end{aligned}$$

<u>Beachte:</u> $\sqrt{x^2-1}$ ist nur definiert für $x^2 - 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 \geq 1 \;\Leftrightarrow\; |x| \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \geq 1$ oder $x \leq -1$.
Beim Ableiten „gerät“ $\sqrt{x^2-1}$ in den Nenner: $\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{2x}{(x^2+1)^{3/2}\sqrt{x^2-1}}$, also alles „richtig“ für $|x| > 1 \;\Leftrightarrow x > 1$ oder $x < -1$

d)

$$\begin{aligned}
e_n(x) &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\
e_n'(x) &= n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{n}} \\
&= e_n(x)\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{n}}
\end{aligned}$$

nach der Kettenregel!

Bemerkung: Später sehen wir:

$$e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x \text{ für } n \to +\infty$$

Obige Formel legt also

$$(e^x)' = e^x$$

nahe, da $(1+\frac{x}{n}) \to 1$ für $n \to +\infty$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest.

Problem: Gilt: $\lim_n e_n'(x) = (e^x)'$?
Vertauschen von zwei Grenzübergängen!

Aufgabe 26: Wie muss a gewählt werden, damit gilt:

$$(2+h)^3 = 2^3 + ah + o(h) \quad \text{mit} \quad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0\,?$$

LÖSUNG: Wir rechnen $(2+h)^3$ aus:

$$\begin{aligned}
(2+h)^3 &= (2+h)^2(2+h) \\
&= (4+4h+h^2)(2+h) \\
&= 8+8h+2h^2+4h+4h^2+h^3 \\
&= 8+12h+6h^2+h^3 \\
&= 8+\underbrace{12}_{a}h+\underbrace{h^2(6+h)}_{=o(h)}
\end{aligned}$$

$\boxed{a=12}$!
oder $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$
$f(2)=2^3=8$, $f'(2)=3\cdot 2^2=3\cdot 4=12$
$\Rightarrow \ a=12$ (Def. der Ableitung/MWS!)

Aufgabe 27: a) Bestimmen Sie die drei lokalen Maxima und die zwei lokalen Minima der Funktion

$$W(x) = (x^2-1)^2$$

auf dem Intervall $[-2,2]$.
b) Welche lokalen Extrema ergeben sich für die Funktion

$$f(x) = |x^2-2x|\ ?$$

Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion!

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} W(x) &= (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \\ W(\pm 1) &= (1-1)^2 = 0\ ! \\ W'(x) &= 2(x^2-1)\cdot 2x = 4x(x^2-1) = 4x(x-1)(x+1) \\ &= 4x^3 - 4x \end{aligned}$$

Nullstellen von W': $x=-1, x=0, x=+1$.

i)

$$W'(0) = 0\,.$$

$$0 < h < 1 \;\Rightarrow\; 0 < h^2 < 1 \;\Rightarrow\; W'(h) = 4h(h^2-1) < 0$$

$$-1 < h < 0 \;\Rightarrow\; 0 < h^2 < 1 \;\Rightarrow\; W'(h) = 4\underbrace{h}_{<0}\underbrace{(h^2-1)}_{<0} > 0$$

D.h. für $-1 < h < 0$ ist $W'(h) > 0$, d.h. Steigung der Tangente an den Graphen von W im Punkt $(h, W(h))$ ist positiv, $W'(h) = 0 \rightsquigarrow$ horizontale Tangente, dann $W'(h) < 0$ für $0 < h < 1 \rightsquigarrow$ Tangentensteigung negativ.

$\Rightarrow\; W(0) = 1$ liefert lok. Maximum.

Entsprechend:

ii)

$$W'(\pm 1) = 0$$

$$\begin{aligned} W'(\pm 1 \pm h) &= 4(\pm 1 \pm h)((\pm 1 \pm h)^2 - 1) \\ &= 4(\pm 1 \pm h)(1 \pm 2h + h^2 - 1) \\ &= 4(\pm 1 \pm h)(h^2 \pm 2h) \\ &= 4(\pm 1 \pm h)h(h \pm 2) \end{aligned}$$

$+$ -Fall:

$$W'(1+h) = 4(1+h)h(h+2) > 0 \text{ für } h > 0$$

$$W'(1-h) = 4(1-h)h(h-2) < 0 \text{ für } 0 < h < 1\,!$$

$-$ -Fall:

$$W'(-1+h) = 4(-1+h)h(h-2) = 4(h-1)h(h-2) > 0 \text{ für } 0 < h < 1$$

$$W'(-1-h) = 4(-1-h)h(h+2) = 4(-1)(1+h)h(h+2) < 0 \text{ für } 0 < h (< 1)\,!$$

$\Rightarrow\; W(\pm 1) = 0$ liefern lok. Minima!

iii) Wegen $W(x) = x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$ gilt

$$W(x) \to +\infty \text{ für } x \to \pm\infty\,!$$

$$W(\pm 2) = (4-1)^2 = 3^2 = 9 \to \text{Maxima auf } [-2,2]\,!$$

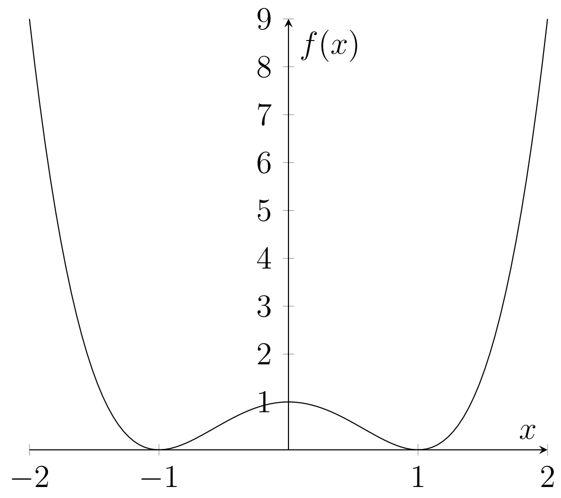
<u>Beachte:</u> $W(\pm 2) = 9$ sind Randextrema!

$$W'(2) = 4\cdot 2\cdot 3 = 24 > 0\,,\; W'(-2) = -24 < 0\,!$$

Alternativ kann man die Art der Extrema im Innern des Intervalls auch wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}
W(\pm 1) &= 0 \quad \text{(s.o.)} \\
W(0) &= 1 \\
W''(x) &= 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1) \\
W''(\pm 1) &= 12 \cdot 1 - 4 = 8 > 0 \\
W''(0) &= -4 < 0 \\
W'(\pm 1) &= 0 \text{ und } W''(\pm 1) = 8 > 0 \;\Rightarrow\; \pm 1 \text{ liefert lok. Min. (Schule!)} \\
W'(0) &= 0 \text{ und } W''(0) = -4 < 0 \;\Rightarrow\; 0 \text{ liefert lok. Max.}
\end{aligned}$$

Skizze:



b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= |x^2 - 2x| \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \\
&= |x(x-2)|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; f(0) = 0 = f(2)$$

Erwarten: $x = 0\,,\; x = 2$ liefern Minima!
Um die Funktion $f(x)$ mit Fallunterscheidung zu schreiben, schauen wir uns die Ungleichung

$$x^2 - 2x \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x\,(x-2) \geq 0$$

an. Sie ist erfüllt in den folgenden beiden Fällen:

$$x \geq 0 \qquad \text{und} \qquad x \geq 2$$

und

$$x \leq 0 \qquad \text{und} \qquad x \leq 2,$$

d.h. in den Fällen $x \geq 2$ bzw. $x \leq 0$. Da diese beiden Fälle nicht ganz $\mathbb{R}$ abdecken müssen wir drei Fälle unterscheiden.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} x^2 - 2x = x(x-2) & \text{für } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x = (-x)(x-2) & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 2x = x(x-2) & \text{für } x < 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \; f'(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 2x-2 = 2(x-1) & \text{für } x>2 \\ -2x+2 = (-2)(x-1) & \text{für } 0<x<2 \\ 2x-2 = 2(x-1) & \text{für } x<0 \end{array} \right\}$$

<u>Problem:</u> f <u>nicht</u> differenzierbar in $x=0\,,\; x=2$ wegen Betrag!

Man erkennt aber: $f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x=1$

i) $f(1)=1$

$$f'(1)=0\,, \qquad \begin{array}{l} f'(1+h) = (-2)h < 0 \text{ für } h>0 \\ f'(1-h) = (-2)(-h) = 2h > 0 \text{ für } 0<h<1 \end{array}$$

$\Rightarrow\; f(1)=1$ lok. Max.

ii) $f(0)=0$

$$\begin{array}{rl} 0<h<1 & f(h) = |h(h-2)| = (-h)(h-2) \\ & f'(h) = (-2)(h-1) > 0 \\ -1<h<0 & f(h) = h(h-2) \\ & f'(h) = 2(h-1) < 0 \end{array}$$

$\Rightarrow\; f(0)=0$ lok. Min.

iii) $f(2)=0$

$$\begin{array}{rl} 0<h<1 & f'(2+h) = 2(2+h-1) = 2(1+h) > 0 \\ & f'(2-h) = (-2)(2-h-1) = \underbrace{(-2)}_{<0}\underbrace{(1-h)}_{>0} < 0 \end{array}$$

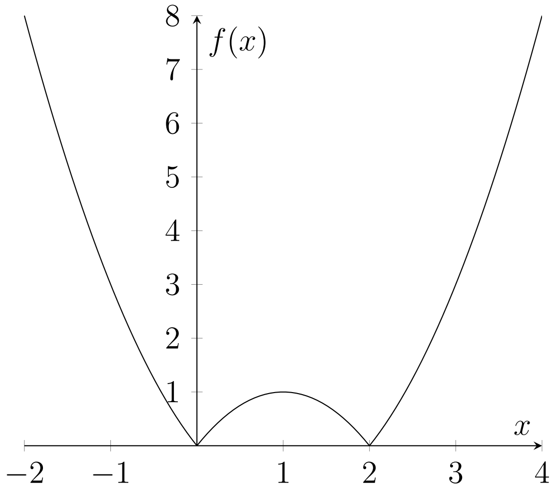
$\Rightarrow\; f(2)=0$ lok. Min.

Wegen $f(x) = |x^2-2x| = x^2|1-\frac{2}{x}| \to +\infty$ für $x\to\pm\infty$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} x>2 & : & f(x) = x^2-2x \;\rightsquigarrow\; \text{Parabel} \\ 0\le x\le 2 & : & f(x) = -x^2+2x \;\rightsquigarrow\; \text{Parabel} \\ x<0 & : & f(x) = x^2-2x \;\rightsquigarrow\; \text{Parabel} \end{array}$$

<u>Beachte:</u> f' springt bei $x=0$ von -2 auf 2 und bei $x=2$ ebenfalls von -2 auf 2.

Skizze:



Aufgabe 28: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und ihre Ableitung f' sei stetig.

i) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x)\,.$$

ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus i), dass auch

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

gilt.

Tipp: Addieren Sie im Zähler $0 = -f(x) + f(x)$.

Bemerkung: Der Differenzenquotient aus i) wird als Rückwärtsdifferenzenquotient bezeichnet, der aus ii) $(\Delta_{2h} f)(x) := \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ als zentraler oder symmetrischer Differenzenquotient von f. Für stetig differenzierbare Funktionen gilt also, dass die Ableitung auch durch den Rückwärts- und den zentralen Differenzenquotienten approximiert wird.

LÖSUNG:

i) Definiere für jedes h ein $\tilde{h} = -h$ und bemerke, dass wenn $h \to 0$ auch $\tilde{h} \to 0$. Damit gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{\tilde{h}\to 0} -\frac{f(x) - f(x+\tilde{h})}{\tilde{h}} = \lim_{\tilde{h}\to 0} \frac{f(x+\tilde{h}) - f(x)}{\tilde{h}} = f'(x)$$

nach Definition der Ableitung (Definition 2.26 im Skript).

Bemerkung: Alternativ ist es möglich, den Mittelwertsatz auf das Intervall $(x-h, x)$ für $h > 0$, bzw. $(x, x+h)$ für $h < 0$ anzuwenden.

ii) Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x) - f(x-h)}{h}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f'(x) + f'(x)\right) = f'(x)\,.
\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung verwendet Aufgabenteil i) und die Definition der Ableitung.