Aufgabe 29: Berechnen Sie $\nabla u(x,y,z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)\right)$ für die Funktion $u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Welche Flächen ergeben sich für $R > 0$ als Niveaumengen $\{(x,y,z) \mid u(x,y,z) = R\}$?

Aufgabe 30: Die Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ seien stetig differenzierbar. Zeigen Sie durch vollständige Induktion die Formel (Produktregel für n - Faktoren):

$$\begin{aligned}(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n)' \;&=\; f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n \\ &\quad + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n + \ldots \\ &\quad + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_{n-1} \cdot f_n' \,.\end{aligned}$$

Tipp: Wie lautet die Formel für $n = 3$ und wie kann sie auf den Fall $n = 2$ zurückführen? Der Induktionsschritt im allgemeinen Fall läßt sich dann entsprechend durchführen.

Aufgabe 31: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ und $f'(a) = -1$. Zeichnen Sie eine Skizze und zeigen Sie folgendes:

a) Es existiert ein $h > 0$ so dass $f(a+h) < 0$.
Tipp: Verwenden Sie den Satz von Rolle aus der Vorlesung.

b) Es existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = 0$.

c) Es existiert ein $x_1 \in (a, x_0)$ mit $f'(x_1) = 0$.

Aufgabe 32: Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R},$$

und

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Tipp: Vergleichen Sie hierzu die Herleitung der Formel $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ aus der Vorlesung und definieren Sie

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x+y) - (\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)) \\ h(x) &= \cos(x+y) - (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\,.) \end{aligned}$$

Betrachten Sie beide Gleichungen gemeinsam und verwenden Sie: Gilt für zwei Funktionen $g(x)$ und $h(x)$: $g(x)^2 + h(x)^2 = 0$, dann folgt $g(x) = 0$ und $h(x) = 0$.