Aufgabe 29: Berechnen Sie $\nabla u(x,y,z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)\right)$ für die Funktion $u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Welche Flächen ergeben sich für $R > 0$ als Niveaumengen $\{(x,y,z) \mid u(x,y,z) = R\}$?

LÖSUNG: $u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla u(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$u(x,y,z) = R \ \Leftrightarrow\ x^2+y^2+z^2 = R^2$
Niveaumengen sind Kugeloberflächen mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und Radius $R > 0$.

Aufgabe 30: Die Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ seien stetig differenzierbar. Zeigen Sie durch vollständige Induktion die Formel (Produktregel für n - Faktoren):

$$\begin{aligned} (f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n)' \;\; = \;\; & f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n \\ & + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n + \ldots \\ & + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_{n-1} \cdot f_n' \,. \end{aligned}$$

Tipp: Wie lautet die Formel für $n = 3$ und wie kann sie auf den Fall $n = 2$ zurückführen? Der Induktionsschritt im allgemeinen Fall läßt sich dann entsprechend durchführen.

LÖSUNG: (IA): $n = 2$:

$$(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2' \quad \text{Produktregel!} \rightarrow \text{Vorlesung/Skript!}$$

Zwischenbemerkung (nach Tipp): $n = 3$:

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)' = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3'$$

Beweis: Setze: $f_1 \cdot f_2 =: g$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ (f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)' &= (g \cdot f_3)' \\ &= g' \cdot f_3 + g \cdot f_3' \quad \text{(Produktregel!)} \\ &= (f_1 \cdot f_2)' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \\ &= (f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2') \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \quad \text{(Produktregel!)} \\ &= f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \quad \checkmark \end{aligned}$$

(IAn): Formel ok. für $n \in \mathbb{N}$:

$$(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + \ldots + f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \cdot f_n'$$

(IS): $n \rightsquigarrow n+1$:
Beh.:

$$(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1})' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1} + \ldots + f_1 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1}'$$

Beweis: $g := f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$

$$\begin{aligned}
(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1})' &= (g \cdot f_{n+1})' \\
&= g' \cdot f_{n+1} + g \cdot f_{n+1}' \quad \text{(Produktregel!)} \\
&= (f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)' \cdot f_{n+1} + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1}' \\
&= (f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + \ldots + f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \cdot f_n') \cdot f_{n+1} + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1}' \\
&= f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1} \\
&+ f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot f_n \cdot f_{n+1} + \ldots \\
&+ f_1 \cdot \ldots \cdot f_n' \cdot f_{n+1} \\
&+ f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1}' \quad \checkmark \quad \text{q.e.d}
\end{aligned}$$

Folgerungen:

a) $(f^n(x))' = n \cdot f^{(n-1)}(x) \cdot f'(x)$.
$(f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_n(x) = f(x))$

b) $(x^n)' = nx^{n-1}$
$(f(x) = x\,,\ f'(x) = 1\,)$

Aufgabe 31: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ und $f'(a) = -1$. Zeichnen Sie eine Skizze und zeigen Sie folgendes:

a) Es existiert ein $h > 0$ so dass $f(a+h) < 0$.
Tipp: Verwenden Sie den Satz von Rolle aus der Vorlesung.

b) Es existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = 0$.

c) Es existiert ein $x_1 \in (a, x_0)$ mit $f'(x_1) = 0$.

LÖSUNG:

a) Da die Funktion f differenzierbar in a ist, existiert nach einem Satz aus der Vorlesung eine Funktion $o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \qquad \text{und} \qquad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{o(h)}{h} \qquad \text{und} \qquad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Da $f(a) = 0$, $f'(a) = -1 < 0$, $h > 0$ und $\frac{o(h)}{h}$ beliebig klein wird, muss (sobald $|\frac{o(h)}{h}| < 1$ ist) $f(a+h) < 0$ sein. Diese Behauptung gilt auch für jedes $\tilde{h}$ mit $0 < \tilde{h} \leq h$.

b) Da jede differenzierbare Funktion auch stetig ist, $a+h < b$ mit h genügend klein und $f(a+h) < 0 < f(b)$ existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = 0$.

c) Da f differenzierbar und $f(a) = 0 = f(x_0)$ existiert nach dem Satz von Rolle ein $x_1 \in (a, x_0)$ mit $f'(x_1) = 0$.

Aufgabe 32: Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned} & \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}, \\ \text{und} \quad & \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tipp: Vergleichen Sie hierzu die Herleitung der Formel $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ aus der Vorlesung und definieren Sie

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x+y) - (\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)) \\ h(x) &= \cos(x+y) - (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\,.) \end{aligned}$$

Betrachten Sie beide Gleichungen gemeinsam und verwenden Sie: Gilt für zwei Funktionen $g(x)$ und $h(x)$: $g(x)^2 + h(x)^2 = 0$, dann folgt $g(x) = 0$ und $h(x) = 0$.

LÖSUNG:
$g(x) := \sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$$\begin{aligned} g(0) &= \sin y - 0 - \sin y \cdot 1 = 0\,, \text{ da } \cos 0 = 1\,, \ \sin 0 = 0 \\ g'(x) &= \cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

$h(x) := \cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y = g'(x)\,!$

$$\begin{aligned} h(0) &= \cos y - \cos y + 0\,, \text{ da } \cos 0 = 1\,, \ \sin 0 = 0 \\ h'(x) &= -\sin(x+y) + \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Zusammen haben wir $g' = h$ und $h' = -g$. Wir zeigen nun $g^2(x) + h^2(x) \equiv 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Für $z(x) := g^2(x) + h^2(x)$ gilt $z(0) = 0$ (s.oben).
und $z' = 2gg' + 2hh' = 2(gh - hg) \equiv 0 \ \Rightarrow \ z(x) = 0\,!$
$\Rightarrow \ g(x) \equiv 0$ und $h(x) \equiv 0 \ \Rightarrow$ Beh.!