

Aufgabe 33: Zeigen Sie, dass für die Funktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

gilt:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (\cosh x)' = \sinh x, \quad \text{b)} \quad (\sinh x)' = \cosh x, \\ \text{c)} \quad & \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tipp(zu c)): Erinnern Sie sich hierzu an die Herleitung der Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$!

Aufgabe 34: Stellen Sie die im Dezimalsystem gegebenen Zahlen $0, \bar{7}$ und $5,43\overline{21}$ unter Verwendung der Summenformel für unendliche geometrische Reihen als gemeine Brüche dar!

Aufgabe 35: a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden G_1 und G_2 zeichnerisch durch Anfertigen einer geeigneten Skizze und rechnerisch durch Lösen des zugehörigen linearen Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y = \frac{1}{\sqrt{5}} \right\} \\ G_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y = \frac{7}{\sqrt{5}} \right\} \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie eine Gerade durch die Punkte

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei sie die Gerade sowohl in der Form $G = \{x + \alpha r \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, als auch in der Form $G = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid n_1 y_1 + n_2 y_2 = d\}$ angeben und berechnen Sie die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Koordinatenachsen.

Aufgabe 36: Eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ ist (analog zum $\mathbb{R}^2$) gegeben durch einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ und einen Richtungsvektor $r \in \mathbb{R}^3$, $r \neq 0$ mittels

$$G = \{x + \alpha r \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

- a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, um den Schnitt von G mit einer Ebene

$$E = \{y + \beta p + \gamma q \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

für $y, p, q \in \mathbb{R}^3$, p und q linear unabhängig, zu berechnen.

- b) Welche Fälle können hierbei auftreten?

- c) Berechnen Sie den Schnitt von

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Welcher Fall aus b) ist das?