Aufgabe 33: Zeigen Sie, dass für die Funktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (\cosh x)' = \sinh x, \quad \text{b)} \quad (\sinh x)' = \cosh x, \\ \text{c)} & \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Tipp(zu c)): Erinnern Sie sich hierzu an die Herleitung der Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$!

LÖSUNG:

a)

$$(\cosh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

Ableitung mit Kettenregel und $(e^x)' = e^x$

b)

$$(\sinh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

Ableitung mit Kettenregel und $(e^x)' = e^x$

c)

$$f(x) := \cosh^2 x - \sinh^2 x\,,\ f(0) = 1\,,\ \text{da}$$

$$\cosh 0 = \frac{1}{2}(e^0 + e^{-0}) = \frac{1}{2}(1+1) = 1\,,\ \sinh 0 = \frac{1}{2}(e^0 - e^{-0}) = 0\,.$$

$$f'(x) \overset{a),b)}{=} 2\cosh x \cdot \sinh x - 2\sinh x \cosh x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

$$\Rightarrow\ f(x) = \text{const} \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\ \text{da } f(0) = 1\,.$$

Aufgabe 34: Stellen Sie die im Dezimalsystem gegebenen Zahlen $0,\overline{7}$ und $5,43\overline{21}$ unter Verwendung der Summenformel für unendliche geometrische Reihen als gemeine Brüche dar!

LÖSUNG: Es gilt unter Verwendung der Formel für die geometrische Reihe

$$0,\overline{7} = 7\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 7\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\Big) = 7\Big(\frac{10}{9} - 1\Big) = \frac{7}{9}$$

und analog

$$\begin{aligned} 5,43\overline{21} &= \frac{543}{100} + \frac{21}{100}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^k = \frac{543}{100} + \frac{21}{100}\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{100}} - 1\Big) \\ &= \frac{543}{100} + \frac{21}{100}\cdot\frac{1}{99} = \frac{17926}{3300} = \frac{8963}{1650} \end{aligned}$$

Aufgabe 35: a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden G_1 und G_2 zeichnerisch durch Anfertigen einer geeigneten Skizze und rechnerisch durch Lösen des zugehörigen linearen Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\frac{2}{\sqrt{5}}\,x + \frac{1}{\sqrt{5}}\,y = \frac{1}{\sqrt{5}} \right\} \\ G_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{5}}\,x + \frac{2}{\sqrt{5}}\,y = \frac{7}{\sqrt{5}} \right\} \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie eine Gerade durch die Punkte

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei sie die Gerade sowohl in der Form $G = \{x + \alpha r \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$, als auch in der Form $G = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, n_1 y_1 + n_2 y_2 = d\}$ angeben und berechnen Sie die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Koordinatenachsen.

LÖSUNG:

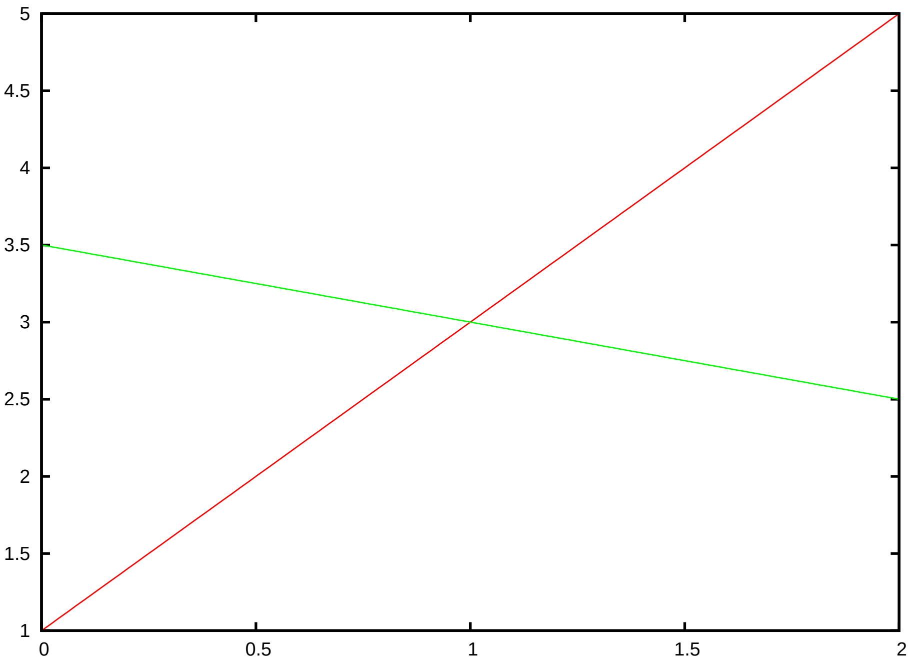
a)

$$\begin{array}{rcrcll} -\frac{2}{\sqrt{5}}\,x & + & \frac{1}{\sqrt{5}}\,y & = & \frac{1}{\sqrt{5}} & |\cdot\sqrt{5} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\,x & + & \frac{2}{\sqrt{5}}\,y & = & \frac{7}{\sqrt{5}} & |\cdot\sqrt{5} \\ \hline -2x & + & y & = & 1 & \\ x & + & 2y & = & 7 & |\cdot 2 \\ \hline -2x & + & y & = & 1 & \\ & & 5y & = & 15 & \Rightarrow\ y = 3 \\ & & & & & \Rightarrow\ 2x = 3 - 1 = 2 \\ & & & & & \Rightarrow\ x = 1 \end{array}$$

$S = (1, 3)$

Skizze:

$$\begin{aligned} G_1 &: -\frac{2}{\sqrt{5}}\,x + \frac{1}{\sqrt{5}}\,y = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow -2x + y = 1 \Leftrightarrow y = 2x + 1 \\ G_2 &: \frac{1}{\sqrt{5}}\,x + \frac{2}{\sqrt{5}}\,y = \frac{7}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,x + y = \frac{7}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{7}{2} \end{aligned}$$



Alternative Rechnung:

$$\begin{aligned} & 2x + 1 = -1/2x + 7/2 \\ \Leftrightarrow\ & 4x + 2 = -x + 7 \\ \Leftrightarrow\ & 5x = 5 \ \Rightarrow\ x = 1 \ \Rightarrow\ y = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

b) Wir wollen die Gerade zuerst in der Form

$$G = \{x + \alpha r \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

angeben. Dazu setzen wir

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um Die Gerade in der Form

$$G = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, n_1 y_1 + n_2 y_2 = d\}$$

schreiben zu können müssen wir das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{array}{cccccccc} & n_1 & + & 2 & n_2 & = & d & \\ 2 & n_1 & + & & n_2 & = & d & \\ \hline & n_1 & + & 2 & n_2 & = & d & \\ & & - & 3 & n_2 & = & -d & \Rightarrow\ n_2 = \frac{d}{3} \\ & & & & & & & \Rightarrow\ n_1 = d - 2n_2 = \frac{d}{3} \end{array}$$

Weiterhin müssen n_1 und n_2 die Gleichung $n_1^2 + n_2^2 = 1$ erfüllen.

$$n_1^2 + n_2^2 = 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{d^2}{9} + \frac{d^2}{9} = 1 \ \Leftrightarrow\ d^2 = \frac{9}{2} \ \Rightarrow\ d = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow n_1 = n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d.h.

$$G = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}}\, y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, y_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \right\}.$$

An dieser Form kann man nun auch leicht die Schnittpunkte mit den Achsen ablesen. Es sind die Punkte

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36: Eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ ist (analog zum $\mathbb{R}^2$) gegeben durch einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ und einen Richtungsvektor $r \in \mathbb{R}^3$, $r \neq 0$ mittels

$$G = \{x + \alpha r \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, um den Schnitt von G mit einer Ebene

$$E = \{y + \beta p + \gamma q \,|\, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

für $y, p, q \in \mathbb{R}^3$, p und q linear unabhängig, zu berechnen.

b) Welche Fälle können hierbei auftreten?

c) Berechnen Sie den Schnitt von

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Welcher Fall aus b) ist das?

LÖSUNG:

a) Da die Schnittmenge der Geraden G mit der Ebene E die Menge aller Punkte aus $\mathbb{R}^3$ ist, die sowohl auf der Gerade als auch in der Ebene liegen, können wir die Schnittmenge bestimmen, indem wir

$$x + \alpha r = y + \beta p + \gamma q$$

setzen und das sich daraus ergebene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha r_1 & - & \beta p_1 & - & \gamma q_1 & = & y_1 - x_1 \\ \alpha r_2 & - & \beta p_2 & - & \gamma q_2 & = & y_2 - x_2 \\ \alpha r_3 & - & \beta p_3 & - & \gamma q_3 & = & y_3 - x_3 \end{array}$$

lösen.

b) Möchte man den Schnitt einer Geraden mit einer Ebene berechnen, so sind drei verschiedene Ergebnisse möglich:

i) Gerade und Ebene schneiden sich nicht, das heißt die Gerade liegt parallel zur Ebene.

ii) Die Gerade schneidet die Ebene, so dass die Schnittmenge aus einem Punkt besteht.

iii) Die Gerade liegt in der Ebene, so dass die Schnittmenge die Gerade selber ist.

c) In diesem konkreten Fall sieht das Gleichungssystem wie folgt aus:

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
 & \alpha & + & \beta & & & = & 2 \\
 & 4\alpha & - & 2\beta & - & 3\gamma & = & -1 \\
 & 3\alpha & - & \beta & - & 2\gamma & = & 0 \\
\hline
\Leftrightarrow & \alpha & + & \beta & & & = & 2 \\
 & & - & 6\beta & - & 3\gamma & = & -9 \\
 & & - & 4\beta & - & 2\gamma & = & -6 \\
\hline
\Leftrightarrow & \alpha & + & \beta & & & = & 2 \\
 & & & \beta & + & \frac{1}{2}\gamma & = & \frac{3}{2} \\
 & & & & & 0 & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \beta &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\gamma \\
\alpha &= 2 - \beta = 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma
\end{aligned}$$

D.h. die Schnittmenge ist

$$\begin{aligned}
S &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \gamma \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 5 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \middle| \gamma \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

und somit eine Gerade. Genauer gesagt handelt es sich dabei um die Gerade G, die lediglich mit einem anderen Stütz- und Richtungsvektor aufgeschrieben worden ist.