Aufgabe 37: a) Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß diese vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.
b) Bilden die drei Vektoren

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Falls nicht, so geben Sie bitte einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ an, der sich nicht als Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen läßt.
Tipp: Berücksichtigen Sie die Eigenschaften des Kreuzproduktes $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.
c) Sind die drei Vektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig? Bilden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Wie lauten die Koordinaten des Vektors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich dieser Basis?

LÖSUNG:

a)

$$\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 + \xi v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lrcrcrcrcl} \text{I:} & \lambda & - & \mu & - & 2\nu & + & 2\xi & = & 0 \\ \text{II:} & \lambda & + & 2\mu & + & 13\nu & + & 11\xi & = & 0 \\ \text{III:} & \lambda & - & \mu & - & 2\nu & + & 2\xi & = & 0 \end{array} \right\}$$

Man erkennt: I=III!

$$\text{I} \ \Leftrightarrow \ \lambda = \mu + 2\nu - 2\xi$$

Einsetzen in II:

$$\begin{aligned} & \mu + 2\nu - 2\xi + 2\mu + 13\nu + 11\xi = 0 \\ \Leftrightarrow \ & 3\mu + 15\nu + 9\xi = 0 \\ \Leftrightarrow \ & \boxed{\mu + 5\nu + 3\xi = 0} \\ \Leftrightarrow \ & \boxed{\mu = -5\nu - 3\xi} \\ \Rightarrow \ & \lambda = -5\nu - 3\xi + 2\nu - 2\xi \\ & \boxed{\lambda = -3\nu - 5\xi} \end{aligned}$$

Wähle $\nu, \xi = 1 \;\Rightarrow\; \mu = -8 = \lambda$.

Also gilt z.B.: $(-8)v_1 + (-8)v_2 + v_3 + v_4 = 0$!

(Direkt nachrechnen!) D.h. $v_1, \dots, v_4$ sind linear abhängig.

b) ① Lineare Abhängigkeit:

$$\lambda w_1 + \mu w_2 + \nu w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lrcrcrcl} \text{I:} & 2\lambda & + & 3\mu & + & \nu & = & 0 \\ \text{II:} & \lambda & - & \mu & + & 3\nu & = & 0 \\ \text{III:} & & & \mu & - & \nu & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{III} \;\Leftrightarrow\; \mu = \nu .$$

Einsetzen in II: $\lambda = \mu - 3\nu = \nu - 3\nu = -2\nu$

Einsetzen in I: $2\lambda = -\nu - 3\mu = -\nu - 3\nu = -4\nu \;\Rightarrow\; \lambda = -2\nu \quad \checkmark$

Wähle $\nu = 1 : \Rightarrow \;\mu = 1\,,\; \lambda = -2$

$$\Rightarrow\; (-2)w_1 + w_2 + w_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{w_1 = \tfrac{1}{2}w_2 + \tfrac{1}{2}w_3}$$

D.h. $\{w_1, w_2, w_3\}$ sind linear abhängig und bilden daher sicher keine Basis.

② Es gilt:

$$\begin{aligned} w_2 \times w_3 = w_2 \wedge w_3 \; &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-3 \\ 1+3 \\ 9+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{w_2, w_3\}$ sind linear unabhängig.

Denn sonst: $\exists \alpha \neq 0$ mit $w_3 = \alpha w_2$

$$\Rightarrow\; w_2 \times w_3 = w_2 \times (\alpha w_2) = \alpha(w_2 \times w_2) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen ① gilt also: $\operatorname{span}\{w_1, w_2, w_3\} = \operatorname{span}\{w_2, w_3\}$.

$\operatorname{span}\{w_2, w_3\}$ ist eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $w_2 \times w_3 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor!

Es gilt:

$$\underbrace{w_1}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(w_2 \times w_3)}_{\neq 0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = -4 + 4 + 0 = 0$$

$\Rightarrow\; w_1 \in$ dieser Ebene E, d.h. $w_1 \in \operatorname{span}\{w_2, w_3\} = \operatorname{span}\{w_1, w_2, w_3\}$.

Die Ebene E ist beschrieben durch:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 | x \cdot (w_2 \times w_3) = 0\},$$

d.h. E enthält alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$, die senkrecht (=orthogonal) zu $w_2 \times w_3$ sind.

Der Vektor $z = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ liegt nicht in E, wegen

$$z \cdot (w_2 \times w_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 + 8 + 50 = 60 > 0\,!$$

Daher lässt sich $z = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ <u>nicht</u> als Linearkombination von w_2 und w_3 und wegen 1 auch nicht als Linearkombination von w_1, w_2 und w_3 darstellen.

c) 1 <u>Linear unabhängig:</u>

$$\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lrcrcrcl} \text{I:} & \lambda & + & 3\mu & + & \nu & = & 0 \\ \text{II:} & 2\lambda & + & 2\mu & + & \nu & = & 0 \\ \text{III:} & 3\lambda & + & \mu & + & 2\nu & = & 0 \end{array} \right\}$$

I'=I	λ	$+$	3μ	$+$	ν	$=$	0
II'=II-2I:		$-$	4μ	$-$	ν	$=$	0
III'=III-3I:		$-$	8μ	$-$	ν	$=$	0
I"=I'	λ	$+$	3μ	$+$	ν	$=$	0
II"=II':		$-$	4μ	$-$	ν	$=$	0
III"=III'-2II':					ν	$=$	0

$\nu = 0 \;\Rightarrow\;$ (Einsetzen in II' !) $\mu = 0 \;\Rightarrow\;$ (Einsetzen in I" !) $\lambda = 0$

D.h. $\{u_1, u_2, u_3\}$ sind linear unabhängig.

② Erzeugen $\mathbb{R}^3$: $\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & 3\mu & + & \nu & = & x_1 \\ 2\lambda & + & 2\mu & + & \nu & = & x_2 \\ 3\lambda & + & \mu & + & 2\nu & = & x_3 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & 3\mu & + & \nu & = & x_1 \\ & - & 4\mu & - & \nu & = & x_2 - 2x_1 \\ & - & 8\mu & - & \nu & = & x_3 - 3x_1 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & 3\mu & + & \nu & = & x_1 \\ & - & 4\mu & - & \nu & = & x_2 - 2x_1 \\ & & & & \nu & = & x_3 - 3x_1 - 2x_2 + 4x_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad (-4)\mu = \nu + x_2 - 2x_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_2 - 2x_1 = -x_1 - x_2 + x_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \lambda & = & x_1 - 3\mu - \nu \\ & = & x_1 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_3 - x_1 + 2x_2 - x_3 \\ & = & -\frac{3}{4}x_1 + \frac{5}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 \\ & = & \frac{1}{4}(-3x_1 + 5x_2 - x_3) \\ & = & \left(-\frac{1}{4}\right)(3x_1 - 5x_2 + x_3) \end{array}$$

D.h. $\{u_1, u_2, u_3\}$ erzeugen auch $\mathbb{R}^3$ und mit ① zusammen bilden sie daher auch eine Basis!

③ Koordinaten des geg. Vektors bzgl. dieser Basis:

Wollen wir den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis $\{u_1, u_2, u_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ darstellen, so setzen wir in ② $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und erhalten

$$\lambda = -\frac{1}{4}(3 - 5 + 1) = \frac{1}{4}, \quad \mu = \frac{1}{4}(1 + 1 - 1) = \frac{1}{4}, \quad \nu = 1 - 2 + 1 = 0.$$

D.h. bzgl. der Basis $\{u_1, u_2, u_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ lauten die Koordinaten von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 38: Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

a) $\{(1, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$	ja ☐	nein ☐
b) $\{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	ja ☐	nein ☐
c) $\{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	ja ☐	nein ☐
d) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 = 5x_3\}$	ja ☐	nein ☐
e) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 7\}$	ja ☐	nein ☐

LÖSUNG:

a) Nein!

$U_0 := \{(1,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ ist kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, da $(0,0,0) \notin U_0$.

Aber $U_0 = (1,0,0) + \overline{U_0} = (1,0,0) + \{(0,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ ist affiner Unterraum!

b) Ja!

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

U_1 ist Gerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$a \in U_1 \;\Rightarrow\; \lambda a \in U_1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$a,b \in U_1 \;\Rightarrow\; a+b \in U_1.$$

c) Ja!

$$U_2 = \{(x,2x,3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

wie b)!

d) Ja!

$$\begin{aligned} U_3 &= \{(x_1,x_2,x_3) \mid 2x_1 + x_2 = 5x_3\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \mid 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \mid \frac{2}{\sqrt{30}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{30}}x_2 - \frac{5}{\sqrt{30}}x_3 = 0\} \end{aligned}$$

U_3 ist also eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die den Ursprung enthält.

e) Nein!

$$U_4 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 7\} \;\Rightarrow\; (0,0,0) \notin U_4!$$

Aber U_4 ist affiner UR:

$$U_4 = (1,3,0) + \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 0\}!$$

Aufgabe 39: Es sei $\mathcal{P}^k = \operatorname{span}\{1,t,t^2,\cdots,t^k\}$ der Vektorraum der Polynome, deren Grad höchstens $k (\in \mathbb{N})$ sei. Zeigen Sie, dass

$$U := \{p \in \mathcal{P}^k \mid p(5) = 0\,,\; p(7) = 0\}$$

ein Unterraum von $\mathcal{P}^k$ ist.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{P}^k :&\quad p(t) = a_k t^k + \ldots + a_1 t + a_0 \\ p \in U :&\quad p(t) = a_k t^k + \ldots + a_1 t + a_0 \\ &\quad p(5) = 5^k a_k + 5^{k-1} a_{k-1} + \ldots + 5a_1 + a_0 = 0 \\ &\quad p(7) = 7^k a_k + \ldots + 7a_1 + a_0 = 0 \end{aligned}$$

Behauptung: U ist Untervektorraum von $\mathcal{P}^k$.
Nachweis:
Um zu zeigen, dass eine Teilmenge $U \subset V$ eines Vektorraumes V ein Untervektorraum ist, genügt es,
① $0 \in U \subset V$,
② $x \in U$, $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x \in U$ und
③ $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$
zu zeigen,denn
(A1),(A2) gelten wegen ③ und $U \subset \mathcal{P}^k$,
(S1),(S2) gelten wegen ② und $U \subset \mathcal{P}^k$,
(A3) gilt wegen ①,
(A4) folgt aus ③ und ② mit $\lambda = -1$ und
(D1), (D2) folgen aus ②, ③ und $U \subset \mathcal{P}^k$.

① $p_0(t) := 0 \cdot t^k + \ldots + 0 \cdot t + 0$, das Nullpolynom ist $\in U$!
Denn: $p_0 \in \mathcal{P}^k$ und $p_0(5) = p_0(7) = 0$!

② Es sei $p \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ $\lambda p \in U$. Denn:

$$\begin{aligned}
p(t) &= a_k t^k + \ldots + a_1 t + a_0 \\
p(5) &= \ldots = p(7) = \ldots = 0 \quad \text{(s. oben)} \\
\lambda p(t) &= (\lambda a_k) t^k + \ldots + (\lambda a_1) t + \lambda a_0 \quad \in \mathcal{P}^k \\
(\lambda p)(5) &= 5^k \lambda a_k + \ldots + 5 \lambda a_1 + \lambda a_0 \\
&= \lambda(\underbrace{5^k a_k + \ldots + 5 a_1 + a_0}_{=0}) = 0, \\
(\lambda p)(7) &= 0 \quad \text{entsprechend}
\end{aligned}$$

③ $p \in U$, $q \in U \Rightarrow p + q \in U$. Denn:

$$\begin{aligned}
p(t) &= a_k t^k + \ldots + a_1 t + a_0 \\
q(t) &= b_k t^k + \ldots + b_1 t + b_0 \\
p(5) = 0 &\Leftrightarrow 5^k a_k + \ldots + 5 a_1 + a_0 = 0 \\
q(5) = 0 &\Leftrightarrow 5^k b_k + \ldots + 5 b_1 + b_0 = 0 \\
(p+q)(t) &= (a_k + b_k) t^k + \ldots + (a_1 + b_1) t + a_0 + b_0 \quad \in \mathcal{P}^k, \text{ denn} \\
(p+q)(5) &= (a_k + b_k) 5^k + \ldots + (a_1 + b_1) 5 + a_0 + b_0 \\
&= \underbrace{5^k a_k + \ldots + 5 a_1 + a_0}_{=0} + \underbrace{5^k b_k + \ldots + 5 b_1 + b_0}_{=0} = 0 \\
(p+q)(7) &= 0 \quad \text{entsprechend}
\end{aligned}$$

Aufgabe 40: a) Gegeben seien die folgenden drei Punkte im $\mathbb{R}^3$:

$$P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Ebene E, welche durch diese drei Punkte geht, in Parameterform, d.h. in der Form

$$E = \{x + \lambda r + \mu q \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

mit $x, r, q \in \mathbb{R}^3$ an.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Kreuzproduktes eine Darstellung der Ebene der Form $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d\}$.

LÖSUNG: a) Wir berechnen eine Parameterdarstellung von E wie folgt:

$$\begin{aligned} E: \quad \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \mu \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zur Probe rechnet man nach, daß

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{array} \right\} \text{ liefert } \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = P_1 . \\ \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{array} \right\} \text{ liefert } \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = P_2 . \\ \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{array} \right\} \text{ liefert } \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = P_0 . \end{aligned}$$

b) Wir berechnen einen Normalenvektor an E mit Hilfe des Kreuzproduktes der beiden Richtungsvektoren von E.

$$\mathbf{n} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+7 \\ -8-0 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Zur Probe rechnet man nach, daß

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= 0 - 8 + 8 = 0, \quad (\checkmark) \\ \mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} &= 0 - 56 + 56 = 0. \quad (\checkmark) \end{aligned}$$

Da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = -8x_2 - 8x_3$$

und wir wissen, dass $P_0 \in E$, also

$$d = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = 16$$

ist die Ebene E geben durch

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_2 + x_3 = -2\}.$$

Bemerkung: Es war in der Aufgabenstellung nicht gefordert, dass $\mathbf{n}$ normiert ist. Natürlich ist die Lösung $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = -\frac{2}{\sqrt{2}}\}$ genauso richtig.