Vorbemerkung:
Dieses Übungsblatt ist als Probeklausur gedacht und geht nicht in die Wertung der vorgerechneten Übungsaufgaben ein. Es soll Ihnen einen Eindruck vermitteln, wie Aufgaben der anstehenden Klausur beim jetzigen Stand der Vorlesung aussehen könnten.
Außerdem soll es Ihnen die Gelegenheit geben, Ihren Wissensstand selbst zu überprüfen. Wir empfehlen daher sehr eindringlich, die Aufgaben alleine zu bearbeiten und dabei auch die benötigte Zeit zu kontrollieren bzw. zu protokollieren.

Probeklausur:

Aufgabe 41: Die Funktion f sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 + 5x + 6} & \text{falls } x \neq -2, x \neq -3 \\ a & \text{falls } x = -2\,, \end{cases},$$

wobei a ein reeller Parameter ist.

a) Wie muss man den Parameter a wählen, damit f in $x = -2$ stetig ist?
b) Kann man f auch stetig auf $x = -3$ fortsetzen?

Aufgabe 42: Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 \tan x = x^2 \dfrac{\sin x}{\cos x}$,
b) $g(x) = (e^x + e^{-x})^5$,
c) $h(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ für $x \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabe 43: a) Gegeben seien die folgenden drei Punkte im $\mathbb{R}^3$:

$$P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Ebene E, welche durch diese drei Punkte geht, in Parameterform, d.h. in der Form

$$E = \{x + \lambda r + \mu q \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

mit $x, r, q \in \mathbb{R}^3$ an.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Kreuzproduktes eine Darstellung der Ebene der Form $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d\}$.

Aufgabe 44: Weisen Sie nach, daß die folgenden drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -20 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

Aufgabe 45: Berechnen Sie den Gradienten

$$\nabla f(u, v, w) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v, w),\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v, w),\ \frac{\partial f}{\partial w}(u, v, w)\right)$$

der Funktion

$$f(u, v, w) = \sqrt{(u - 1)^2 + (v - 3)^2 + (w - 5)^2}\ .$$

Welche Flächen ergeben sich für $R > 0$ als Niveaumengen

$$\{(u, v, w) \mid f(u, v, w) = R\}\ ?$$

Aufgabe 46: Zeigen Sie, dass für die Funktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (\cosh x)' = \sinh x, \quad \text{b)} \quad (\sinh x)' = \cosh x, \\ \text{c)} & \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Tipp(zu c)): Erinnern Sie sich hierzu an die Herleitung der Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$!

Aufgabe 47:

a) Sei $g(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V und $\|\cdot\|_g$ die davon induzierte Norm. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\|x - y\|_g^2 = \|x\|_g^2 + \|y\|_g^2 - 2g(x, y).$$

b) Was bedeutet dies geometrisch, wenn man für $g(\cdot,\cdot)$ das euklidische Skalarprodukt wählt?
Tipp: Erinnern Sie sich an die geometrische Deutung des euklidischen Skalarproduktes.

Aufgabe 48:

a) Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion f. Geben Sie das Newton-Verfahren an, mit dem man Nullstellen der Funktion f approximieren kann.

b) Geben Sie zwei Möglichkeiten an, die dazu führen, dass die Bestimmung von Nullstellen über das Newton-Verfahren nicht funktioniert.

Aufgabe 49:

a) Geben Sie je ein Beispiel für einen eindimensionalen und einen zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ an.

b) Zeigen Sie, dass der Schnitt $U = U_1 \cap U_2$ zweier Untervektorräume U_1, U_2 eines Vektorraums V wieder ein Untervektorraum ist.

c) Beschreiben Sie, welche unterschiedlichen Fälle beim Schneiden eines eindimensionalen Untervektorraums des $\mathbb{R}^3$ mit einem zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ auftreten können.