Vorbemerkung:
Dieses Übungsblatt ist als Probeklausur gedacht und geht nicht in die Wertung der vorgerechneten Übungsaufgaben ein. Es soll Ihnen einen Eindruck vermitteln, wie Aufgaben der anstehenden Klausur beim jetzigen Stand der Vorlesung aussehen könnten.
Außerdem soll es Ihnen die Gelegenheit geben, Ihren Wissensstand selbst zu überprüfen. Wir empfehlen daher sehr eindringlich, die Aufgaben alleine zu bearbeiten und dabei auch die benötigte Zeit zu kontrollieren bzw. zu protokollieren.

Probeklausur:

Aufgabe 41: Die Funktion f sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 + 5x + 6} & \text{falls } x \neq -2, x \neq -3 \\ a & \text{falls } x = -2\,, \end{cases},$$

wobei a ein reeller Parameter ist.

a) Wie muss man den Parameter a wählen, damit f in $x = -2$ stetig ist?
b) Kann man f auch stetig auf $x = -3$ fortsetzen?

LÖSUNG: Für das Zählerpolynom p gilt

$$p(x) \;=\; x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \;=\; (x-2)(x+2)(x-3)$$

und für das Nennerpolynom q gilt

$$q(x) \;=\; x^2 + 5x + 6 \;=\; (x+2)(x+3)$$

Damit folgt

$$p(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)}$$

und folglich

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 20$$

Daher ist f an der Stelle $x = -2$ genau dann stetig, wenn

$$a = f(-2) = \lim_{x\to -2} f(x) = 20$$

gilt.
Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -3-0} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 + 5x + 6} &= -\infty \\ \lim_{x\to -3+0} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 + 5x + 6} &= +\infty \end{aligned}$$

f kann nicht stetig auf $x = -3$ fortgesetzt werden, da $x = -3$ eine Polstelle ist. Insbesondere sind die einseitigen Grenzwerte an der Stelle $x = -3$ weder endlich noch stimmen sie überein.

Aufgabe 42: Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 \tan x = x^2 \dfrac{\sin x}{\cos x}$,
b) $g(x) = (e^x + e^{-x})^5$,
c) $h(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ für $x \in \mathbb{R}^+$.

LÖSUNG:
a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \frac{\sin x}{\cos x} \\ f'(x) &= 2x\frac{\sin x}{\cos x} + x^2\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{cos^2 x} \\ &= 2x\tan x + x^2(1 + \tan^2 x) \\ &= x[x\tan^2 x + 2\tan x + x] \end{aligned}$$

benutzt:

1) $(\sin x)' = \cos x\,,\ (\cos x)' = -\sin x\,,$

2) Produktregel, Quotientenregel.

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= (e^x + e^{-x})^5 \\ g'(x) &= 5(e^x + e^{-x})^4(e^x - e^{-x}) \\ &= 5(e^x + e^{-x})^3(e^{2x} - e^{-2x})\,. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \\ h'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,. \end{aligned}$$

benutzt: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ und Kettenregel!

Aufgabe 43: a) Gegeben seien die folgenden drei Punkte im $\mathbb{R}^3$:

$$P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Ebene E, welche durch diese drei Punkte geht, in Parameterform, d.h. in der Form

$$E = \{x + \lambda r + \mu q \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

mit $x, r, q \in \mathbb{R}^3$ an.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Kreuzproduktes eine Darstellung der Ebene der Form $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d\}$.

LÖSUNG: a) Wir berechnen eine Parameterdarstellung von E wie folgt:

$$\begin{aligned} E: \quad \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \mu\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zur Probe rechnet man nach, daß

$$\left\{\begin{matrix} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{matrix}\right\} \text{ liefert } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = P_1\,.$$

$$\left\{\begin{matrix} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{matrix}\right\} \text{ liefert } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = P_2\,.$$

$$\left\{\begin{matrix} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{matrix}\right\} \text{ liefert } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = P_0\,.$$

b) Wir berechnen einen Normalenvektor an E mit Hilfe des Kreuzproduktes der beiden Richtungsvektoren von E.

$$\mathbf{n} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+7 \\ -8-0 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Zur Probe rechnet man nach, daß

$$\mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 - 8 + 8 = 0, \quad (\checkmark)$$

$$\mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = 0 - 56 + 56 = 0. \quad (\checkmark)$$

Da

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = -8x_2 - 8x_3$$

und wir wissen, dass $P_0 \in E$, also

$$d = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = 16$$

ist die Ebene E geben durch

$$E \quad = \quad \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_2 + x_3 = -2\}.$$

Bemerkung: Es war in der Aufgabenstellung nicht gefordert, dass $\mathbf{n}$ normiert ist. Natürlich ist die Lösung $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = -\frac{2}{\sqrt{2}}\}$ genauso richtig.

Aufgabe 44: Weisen Sie nach, daß die folgenden drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -20 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

LÖSUNG: Wir lösen das zugehörige lineare Gleichungssystem:

$$\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2 + \nu\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcccccc} \text{I:} & -\lambda & + & \mu & + & 2\nu & = & 0 \\ \text{II:} & -\lambda & & & - & 3\nu & = & 0 \\ \text{III:} & & - & 4\mu & - & 20\nu & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Offensichtlich gilt:

$$\begin{array}{lcl} \text{II} & \Leftrightarrow & \nu = -\frac{1}{3}\lambda \Leftrightarrow \lambda = -3\nu\,. \\ \text{III} & \Leftrightarrow & \nu = -\frac{1}{5}\mu \Leftrightarrow \mu = -5\nu\,. \end{array}$$

Einsetzen von II und III in I liefert:

$$0 = 3\nu - 5\nu + 2\nu. \quad \checkmark$$

Also ist ν „frei" wählbar. $\nu = 1$ liefert: $\lambda = -3\,,\ \mu = -5$. Damit erhalten wir

$$\Rightarrow \ (-3)\mathbf{v}_1 + (-5)\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Kontrolle rechnen wir noch

$$\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 = 3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 20 \end{pmatrix}. \quad \checkmark$$

Aufgabe 45: Berechnen Sie den Gradienten

$$\nabla f(u,v,w) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w),\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w),\ \frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\right)$$

der Funktion

$$f(u,v,w) = \sqrt{(u-1)^2 + (v-3)^2 + (w-5)^2}\,.$$

Welche Flächen ergeben sich für $R > 0$ als Niveaumengen

$$\{(u,v,w) \mid f(u,v,w) = R\}\ ?$$

LÖSUNG:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w) & = & \frac{u-1}{\sqrt{(u-1)^2+(v-3)^2+(w-5)^2}} = \frac{u-1}{f(u,v,w)}\,, \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w) & = & \frac{v-3}{\sqrt{(u-1)^2+(v-3)^2+(w-5)^2}} = \frac{v-3}{f(u,v,w)}\,, \\ \frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w) & = & \frac{w-5}{\sqrt{(u-1)^2+(v-3)^2+(w-5)^2}} = \frac{w-5}{f(u,v,w)}\,. \end{array}$$

$$\nabla f(u,v,w) = \frac{1}{\sqrt{(u-1)^2+(v-3)^2+(w-5)^2}} \begin{pmatrix} u-1 \\ v-3 \\ w-5 \end{pmatrix}.$$

$$f(u,v,w) = R \;\Rightarrow\; (u-1)^2+(v-3)^2+(w-5)^2 = R^2$$

$\rightsquigarrow$ Kugeln vom Radius $R > 0$ mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 46: Zeigen Sie, dass für die Funktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (\cosh x)' = \sinh x, \quad \text{b)} \quad (\sinh x)' = \cosh x, \\ \text{c)} & \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Tipp(zu c)): Erinnern Sie sich hierzu an die Herleitung der Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$!

LÖSUNG:

a)

$$(\cosh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}\cdot(-1)) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

Ableitung mit Kettenregel und $(e^x)' = e^x$

b)

$$(\sinh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}\cdot(-1)) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

Ableitung mit Kettenregel und $(e^x)' = e^x$

c)

$$f(x) := \cosh^2 x - \sinh^2 x\,,\ f(0) = 1\,,\ \text{da}$$

$$\cosh 0 = \frac{1}{2}(e^0 + e^{-0}) = \frac{1}{2}(1+1) = 1\,,\ \sinh 0 = \frac{1}{2}(e^0 - e^{-0}) = 0\,.$$

$$f'(x) \overset{a),b)}{=} 2\cosh x \cdot \sinh x - 2\sinh x \cosh x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

$$\Rightarrow\ f(x) = \text{const} \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\ \text{da } f(0) = 1\,.$$

Aufgabe 47: a) Sei $g(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V und $\|\cdot\|_g$ die davon induzierte Norm. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\|x-y\|_g^2 = \|x\|_g^2 + \|y\|_g^2 - 2g(x,y).$$

b) Was bedeutet dies geometrisch, wenn man für $g(\cdot,\cdot)$ das euklidische Skalarprodukt wählt?
Tipp: Erinnern Sie sich an die geometrische Deutung des euklidischen Skalarproduktes.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} \|x-y\|_g^2 &= g(x-y, x-y) \\ &= g(x-y, x) - g(x-y, y) \\ &= g(x,x) - g(y,x) - g(x,y) + g(y,y) \\ &= g(x,x) - 2g(x,y) + g(y,y) \\ &= \|x\|_g^2 - 2g(x,y) + \|y\|_g^2 \end{aligned}$$

b) Wählt man für $g(\cdot,\cdot)$ das Euklidische Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so läßt sich die Gleichung schreiben als

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2.$$

Gilt nun $x \perp y$, so ist $\langle x,y\rangle = 0$, d.h.

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Dies entspricht dem Satz des Pythagoras.
Wählt man jedoch beliebige x, y so kann man die Gleichung umschreiben zu

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos(\alpha) + \|y\|^2,$$

wobei α der von den Vektoren x und y eingeschlossene Winkel ist. Dies entspricht nun dem Kosinussatz.
Bemerkung: In der Klausur würde eine der beiden Interpretationen ausreichen.

Aufgabe 48: a) Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion f. Geben Sie das Newton-Verfahren an, mit dem man Nullstellen der Funktion f approximieren kann.

b) Geben Sie zwei Möglichkeiten an, die dazu führen, dass die Bestimmung von Nullstellen über das Newton-Verfahren nicht funktioniert.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{array}{lcl} x_0 & & \text{Startwert} \\ x_{n+1} & = & x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{array}$$

b) i) Es kann passieren, dass der Nenner $f'(x_n) = 0$ ist. Dann kann das nächste Folgenglied x_{n+1} nicht berechnet werden.

ii) Es kann sein, dass das Verfahren endlos zwischen zwei Punkten hin und her springt.

iii) Es kann sein, dass $x_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ oder $x_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Aufgabe 49: a) Geben Sie je ein Beispiel für einen eindimensionalen und einen zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ an.

b) Zeigen Sie, dass der Schnitt $U = U_1 \cap U_2$ zweier Untervektorräume U_1, U_2 eines Vektorraums V wieder ein Untervektorraum ist.

c) Beschreiben Sie, welche unterschiedlichen Fälle beim Schneiden eines eindimensionalen Untervektorraums des $\mathbb{R}^3$ mit einem zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ auftreten können.

LÖSUNG:

a) Ein eindimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch eine Gerade durch den Ursprung, d.h.

$$G = \{\lambda r \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

für ein $r \in \mathbb{R}^3$, wobei $r \neq 0$ sein muss.
Ein zweidimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch eine Ebene durch den Ursprung, d.h.

$$E = \{\lambda r + \mu q \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

mit $r, q \in \mathbb{R}^3$, r und q linear unabhängig.

b) Um zu zeigen, dass eine beliebige Teilmenge U eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ein Untervektorraum ist, müssen wir zeigen, dass

① $U \neq \emptyset$,

② $p \in U,\ \lambda \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad \lambda p \in U$ und

③ $p, q \in U \quad \Rightarrow \quad p + q \in U$.

Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, werden alle anderen Vektorraum-Eigenschaften automatisch von V auf die Teilmenge U übertragen. Seien nun U_1, U_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Wir zeigen nun für $U = U_1 \cap U_2$ diese drei Eigenschaften.

① Da U_1, U_2 Untervektorräume sind, ist $0 \in U_1$ und $0 \in U_2$, also $0 \in U_1 \cap U_2$, also ist $U_1 \cap U_2$ nicht leer.

② Sei $p \in U_1 \cap U_2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so folgt $\lambda p \in U_1$, da $p \in U_1$ und U_1 ein Untervektorraum. Auf gleiche Weise folgt $\lambda p \in U_2$ und beide Folgerungen zusammen ergeben $\lambda p \in U_1 \cap U_2$.

③ Seien $p, q \in U_1 \cap U_2$ so gilt

$$p \in U_1,\ q \in U_1 \quad \Rightarrow \quad p + q \in U_1$$

und

$$p \in U_2,\ q \in U_2 \quad \Rightarrow \quad p + q \in U_2.$$

Daraus folgt $p + q \in U_1 \cap U_2$.

c) Eindimensionale Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ sind im Allgemeinen Geraden, die durch den Ursprung gehen. Zweidimensionale Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ sind Ebenen, in denen der Ursprung enthalten ist. Betrachtet man also den Schnitt eines eindimensinalen Untervektorraumes mit einem zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, so können zwei Fälle auftreten:

i) Die Untervektorräume schneiden sich in einem Punkt.

ii) Der eindimensionale Untervektorraum ist im zweidimensionalen Untervektorraum enthalten.

Bemerkung: Betrachtet man im Allgemeinen den Schnitt einer Geraden mit einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ so kann noch ein dritter Fall auftreten. Und zwar kann die Schnittmenge leer sein, wenn Gerade und Ebene parallel zueinander liegen. Dies kann hier jedoch nicht passieren, da die Null in jedem Untervektorraum enthalten sein muss.