

Aufgabe 50: Gegeben seien folgende drei quadratische Polynome

$$\begin{aligned}p_1(x) &= x^2 + 2x + 3, \\p_2(x) &= 3x^2 + 2x + 1, \\p_3(x) &= x^2 + x + 2.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Polynome linear unabhängig sind und eine Basis des Vektorraumes der quadratischen Polynome bilden. Wie lautet die Darstellung der Polynome

$$p(x) = 5x^2 + 5x + 6 \quad \text{und} \quad q(x) = 3x + 7$$

bezüglich dieser Basis?

Aufgabe 51: Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

- a) Welches geometrische Objekt bildet die Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die v und w linear abhängig sind.
- b) Welches geometrische Objekt bildet die Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die v und w linear unabhängig sind und $\|w\| = 1$.
- c) Welches geometrische Objekt bildet die Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die gilt $v \cdot w = 0$?
- d) Welches geometrische Objekt bildet die Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die gilt $v \cdot w = 0$ und $\|w\| = 1$?

Aufgabe 52: a) Kann man die in i) und ii) angegebenen Mengen zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzen? Falls ja, führen Sie diese Ergänzung durch.

$$\text{i) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{ii) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

- b) Kann man aus den Mengen in i) und ii) durch Wegstreichen von Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden? Falls ja, wie?

$$\text{i) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{ii) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 53: a) Schreiben Sie den Vektor $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Schreiben Sie den Vektor $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Schreiben Sie das Polynom $t^2 + 4t - 3$ als Linearkombination der Polynome $t^2 - 2t + 5$, $2t^2 - 3t$, $t + 3$.