Aufgabe 50: Gegeben seien folgende drei quadratische Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2 + 2x + 3\,, \\ p_2(x) &= 3x^2 + 2x + 1\,, \\ p_3(x) &= x^2 + x + 2\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Polynome linear unabhängig sind und eine Basis des Vektorraumes der quadratischen Polynome bilden. Wie lautet die Darstellung der Polynome

$$p(x) = 5x^2 + 5x + 6 \quad \text{und} \quad q(x) = 3x + 7$$

bezüglich dieser Basis?

LÖSUNG:

① Möglichkeit 1:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda p_1(x) + \mu p_2(x) + \nu p_3(x) \\ &= (\lambda + 3\mu + \nu)x^2 + (2\lambda + 2\mu + \nu)x + (3\lambda + \mu + 2\nu) \end{aligned}$$

Da die Funktionen $1 = x^0,\ x = x^1,\ x^2$ linear unabhängig sind (siehe Vorlesung bzw. Skript!), folgt:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda &+& 3\mu &+& \nu &=& 0 \\ 2\lambda &+& 2\mu &+& \nu &=& 0 \\ 3\lambda &+& \mu &+& 2\nu &=& 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0\,.$$

Denn dies ist dasselbe lineare Gleichungssystem wie in Aufgabe **??** c)!
Also sind die Polynome $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ linear unabhängig.
Um zu zeigen, dass sie eine Basis des Vektorraumes der quadratischen Polynome bilden, müssen wir noch zeigen, dass sich jedes quadratische Polynom $q(x) = ax^2 + bx + c$ als Linearkombination von $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ schreiben lässt. Dies führt auf das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda &+& 3\mu &+& \nu &=& a \\ 2\lambda &+& 2\mu &+& \nu &=& b \\ 3\lambda &+& \mu &+& 2\nu &=& c\,, \end{array}$$

welches man wie in Aufgabe **??** c) löst:

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(-\frac{1}{4}\right)(3a - 5b + c) \\ \mu &= \frac{1}{4}(a + b - c) \\ \nu &= a - 2b + c\,. \end{aligned}$$

Also bilden $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ eine Basis!

Nun rechnet man noch nach, dass

$$\begin{aligned} p(x) &= 5x^2 + 5x + 6 &&= p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) \\ & &&= 1 \cdot p_1(x) + 1 \cdot p_2(x) + 1 \cdot p_3(x) \end{aligned}$$

bzw.

$$q(x) = 3x + 7 = 2 \cdot p_1(x) - p_2(x) + p_3(x)$$

gilt.

Also $p(x)$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$

und $q(x)$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$.

2 Möglichkeit 2:

(*) $0 = \lambda p_1(x) + \mu p_2(x) + \nu p_3(x)$ soll $\forall x \in \mathbb{R}$ gelten.

Insbesondere gilt es für $x = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = 3\lambda + \mu + 2\nu\,.$$

Außerdem impliziert (*):

$$0 = \lambda p_1'(x) + \mu p_2'(x) + \nu p_3'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

$\Rightarrow$ ($x = 0$ einstzen)

$$0 = 2\lambda + 2\mu + \nu$$

und schließlich:

$$0 = \lambda p_1''(x) + \mu p_2''(x) + \nu p_3''(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

$\Rightarrow$ ($x = 0$ einstzen)

$$0 = 2\lambda + 6\mu + 2\nu = 2(\lambda + 3\mu + \nu)\,.$$

Damit landet man wieder bei obigem linearem Gleichungssystem von 1 und kann fortfahren wie in 1!

Beachte: Hierbei haben wir nicht benutzt, dass $1, x, x^2$ eine Basis des Vektorraumes der quadratischen Polynome bildet!

Aufgabe 51: Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Welches geometrische Objekt bildet die Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die v und w linear abhängig sind.

b) Welches geometrische Objekt bildet die Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die v und w linear abhängig sind und $\|w\| = 1$.

c) Welches geometrische Objekt bildet die Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die gilt $v \cdot w = 0$?

d) Welches geometrische Objekt bildet die Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die gilt $v \cdot w = 0$ und $\|w\| = 1$?

LÖSUNG:

a) Bei der Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die gilt v und w sind linear abhängig handelt es sich um eine Gerade durch den Ursprung mit Richtungsvektor v (nämlich alle Vielfache von v).

b) Bei der Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die gilt v und w sind linear abhängig und $\|w\| = 1$ handelt es sich um zwei Vektoren $w = \frac{v}{\|v\|}$ und $w = -\frac{v}{\|v\|}$.

c) Bei der Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die gilt $v \cdot w = 0$ handelt es sich um die Ebene durch den Ursprung, auf der der Vektor v senkrecht steht.

d) Bei der Menge aller Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ für die gilt $v \cdot w = 0$ und $\|w\| = 1$ handelt es sich um einen Kreis mit Radius 1 in der Ebene durch den Ursprung, die senkrecht zum Vektor v liegt.

Aufgabe 52: a) Kann man die in i) und ii) angegebenen Mengen zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzen? Falls ja, führen Sie diese Ergänzung durch.

i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

b) Kann man aus den Mengen in i) und ii) durch Wegstreichen von Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden? Falls ja, wie?

i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

LÖSUNG:

a) i) Ja! Die beiden Vektoren sind linear unabhängig, so dass ihr Kreuzprodukt einen Vektor liefert, der senkrecht auf den beiden steht.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die drei Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind somit linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

ii) Nein, denn diese beiden Vektoren sind linear abhängig:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) i) Ja! Egal welchen der drei Vektoren man streicht, die anderen beiden Vektoren sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

ii) Nein, denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Egal welchen Vektor man streichen würde, die anderen beiden sind linear abhängig und bilden somit keine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 53: a) Schreiben Sie den Vektor $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Schreiben Sie den Vektor $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Schreiben Sie das Polynom $t^2 + 4t - 3$ als Linearkombination der Polynome $t^2 - 2t + 5, \quad 2t^2 - 3t, \quad t + 3$.

LÖSUNG:

a) Es ist das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} 1 &= r + s + 2t \\ -2 &= r + 2s - t \\ 5 &= r + 3s + t \end{aligned}$$

Löst man dieses, so erhält man $r = -6$, $s = 3$ und $t = 2$, also gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Analog zu Aufgabenteil a) erhält man

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Man muss a, b und c finden mit $t^2+4t-3 = a(t^2-2t+5)+b(2t^2-3t)+c(t+3)$. Also ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= a + 2b \\ 4 &= -2a - 3b + c \\ -3 &= 5a + 3c \end{aligned}$$

zu lösen. Man erhält $a = -3$, $b = 2$ und $c = 4$ und damit

$$t^2 + 4t - 3 = -3(t^2 - 2t + 5) + 2(2t^2 - 3t) + 4(t + 3)$$