Aufgabe 54: Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 9 & -4 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 55: Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern und Bild dieser Abbildung. Sind die Spalten-/Zeilenvektoren linear abhängig?

Aufgabe 56: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, sowie der Vektor $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mittels Gauß-Elimination. Geben Sie die beim Lösen auftretenden Matrizen $L^{(1)}$ und $L^{(2)}$ an.

b) In der LR-Zerlegung (siehe Skript) treten Matrizen $L^{(1)}, L^{(2)}, (L^{(1)})^{-1}, (L^{(2)})^{-1}$ auf. Geben Sie diese an, und berechnen Sie $L = (L^{(1)})^{-1}(L^{(2)})^{-1}$.

c) Wir definieren nun $R = L^{(2)}L^{(1)}A = A^{(3)}$. Rechnen Sie nach, dass $A = LR$ gilt.

d) Lösen Sie schließlich das Gleichungssystem $Ax = b$ noch einmal, diesmal durch Vorwärtseinsetzen ($Ly = b$) und anschließendes Rückwärtseinsetzen ($Rx = y$).

Aufgabe 57: a) Berechnen Sie die Matrizenprodukte **AB** und **BA** für:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Matrizenprodukte $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ und $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ für:

i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$

ii) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$