Übungen zur Ingenieur-Mathematik I **WS 2017/2018**
Blatt 12 **16.01.2018**

Aufgabe 54: Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 9 & -4 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG: Wir lösen diese Aufgabe mittels des Gauß-Jordan-Algorithmus. Dieser ist eine Erweiterung des Gauß-Algorithmus. Anstatt die Matrix in eine Dreieckform zu bringen wird die Matrix in Diagonalform umgewandelt. Zusätzlich setzen wir als rechte Seite die Einheitsmatrix. Dann gilt:

$$\begin{array}{ccc|ccc|cc}
2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdot\frac{1}{2} & \\
4 & 9 & -4 & 0 & 1 & 0 & & \\
-2 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdot(-4) & \cdot(2) \\
4 & 9 & -4 & 0 & 1 & 0 & \hookleftarrow + & \\
-2 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \\
0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & \cdot\frac{1}{3} & \\
0 & 9 & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdot(-9) & \\
0 & 9 & 1 & 1 & 0 & 1 & \hookleftarrow + & \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \hookleftarrow + & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 & \cdot(1) & \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{6}{2} & 1 & \hookleftarrow + & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdot -\frac{3}{2} & \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{17}{2} & -\frac{7}{2} & 1 & & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 & & \\
\hline
\end{array}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 9 & -4 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{17}{2} & -\frac{7}{2} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 55: Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern und Bild dieser Abbildung. Sind die Spalten-/Zeilenvektoren linear abhängig?

LÖSUNG: $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

$$\begin{array}{crcrcrcrll}
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 & \cdot(-\frac{1}{3}) & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & = & 0 & \hookleftarrow + & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & = & 0 & \hookleftarrow + & \\
 & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 & & \\
\hline
\Leftrightarrow & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 & & \\
 & & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_3 & = & 0 & \cdot(-1) & \cdot 3 \\
 & & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_3 & = & 0 & \hookleftarrow + & \\
 & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 & & \hookleftarrow + \\
\hline
\Leftrightarrow & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 & & \\
 & & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_3 & = & 0 & & \\
 & & & & & 0 & = & 0 & & \\
 & & & & & 0 & = & 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{crcl}
\Leftrightarrow & x_2 & = & -2x_3 \\
 & 3x_1 & = & -x_2 - 5x_3 = -3x_3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_3
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Ker}(\mathbf{A}) = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\operatorname{Bild}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4 \mid \text{ es gibt ein } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$

$$\begin{array}{crcrcrcrll}
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & b_1 & \cdot(-\frac{1}{3}) & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & = & b_2 & \hookleftarrow + & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & = & b_3 & \hookleftarrow + & \\
 & & & x_2 & + & 2x_3 & = & b_4 & & \\
\hline
\Leftrightarrow & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & b_1 & & \\
 & & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_3 & = & b_2 - \frac{1}{3}b_1 & \cdot(-1) & \cdot 3 \\
 & & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_3 & = & b_3 - \frac{1}{3}b_1 & \hookleftarrow + & \\
 & & & x_2 & + & 2x_3 & = & b_4 & & \hookleftarrow + \\
\hline
\Leftrightarrow & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & b_1 & & \\
 & & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_3 & = & b_2 - \frac{1}{3}b_1 & & \\
 & & & & & 0 & = & b_3 - b_2 & & \\
 & & & & & 0 & = & b_4 + 3b_2 - b_1 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{crcl}
\Leftrightarrow & b_3 & = & b_2 \\
 & b_4 & = & -3b_2 + b_1
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Bild}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \\ -3b_2 + b_1 \end{pmatrix} \middle| \, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Spalten der Matrix $\mathbf{A}$ sind linear abhängig, denn die letzte Spalte läßt sich als Linearkombination der ersten beiden Spalten schreiben:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Zeilen der Matrix sind ebenfalls linear abhängig, da die zweite und die dritte Zeile identisch sind.

Aufgabe 56: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, sowie der Vektor $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mittels Gauß-Elimination. Geben Sie die beim Lösen auftretenden Matrizen $L^{(1)}$ und $L^{(2)}$ an.

b) In der LR-Zerlegung (siehe Skript) treten Matrizen $L^{(1)}, L^{(2)}, (L^{(1)})^{-1}, (L^{(2)})^{-1}$ auf. Geben Sie diese an, und berechnen Sie $L = (L^{(1)})^{-1}(L^{(2)})^{-1}$.

c) Wir definieren nun $R = L^{(2)}L^{(1)}A = A^{(3)}$. Rechnen Sie nach, dass $A = LR$ gilt.

d) Lösen Sie schließlich das Gleichungssystem $Ax = b$ noch einmal, diesmal durch Vorwärtseinsetzen ($Ly = b$) und anschließendes Rückwärtseinsetzen ($Rx = y$).

LÖSUNG:

a) Die Gauß-Elimination ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & -4 \\ 6 & 2 & 2 & 16 \\ -3 & 8 & 3 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} \cdot(-2) & \cdot 1 \\ \hookleftarrow + & \\ & \hookleftarrow + \end{array}$$

$$\to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & 24 \\ 0 & 6 & 2 & 18 \end{array}\right)}_{=L^{(1)}A} \begin{array}{|c} \\ \cdot(-1) \\ \hookleftarrow + \end{array} \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)}_{=L^{(2)}L^{(1)}A=R}$$

(Die Bezeichnungen $L^{(2)}, L^{(1)}, R$ wurden hier für Teil b) schonmal notiert.) Rückwärtseinsetzen ergibt nun:

$$\begin{aligned} &-2x_3 = -6 \Rightarrow x_3 = 3, \\ &6x_2 + 4x_3 = 24 \Rightarrow 6x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 2, \\ &3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \Rightarrow 3x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1. \end{aligned}$$

b) Im ersten Gauß-Schritt wurde die erste Zeile mit -2 multipliziert und zur zweiten addiert, demnach steht in der Matrix $L^{(1)}$ in der zweiten Zeile in der ersten Spalte eine -2 und in der zweiten Spalte eine 1. Analog steht in der dritten Zeile der ersten Spalte eine 1, da die erste Zeile mit 1 multipliziert wird und zur dritten addiert wird. Analoges gilt für $L^{(2)}$ und wir erhalten

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind:

$$\left(L^{(1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(L^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$L = \left(L^{(1)}\right)^{-1} \left(L^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die Matrix $R = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ haben wir schon bei der Gauß-Elimination berechnet. Multiplizieren wir von links mit L erhalten wir wieder A:

$$LR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix} = A$$

d) Vorwärtseinsetzen: $Ly = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & y_1 = -4, \\ & 2y_1 + y_2 = 16 \Rightarrow y_2 = 24, \\ & -y_1 + y_2 + y_3 = 22 \Rightarrow y_3 = -6. \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen: $Rx = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 24 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & -2x_3 = -6 \Rightarrow x_3 = 3, \\ & 6x_2 + 4x_3 = 24 \Rightarrow 6x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 2, \\ & 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \Rightarrow 3x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 57: a) Berechnen Sie die Matrizenprodukte $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$ für:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Matrizenprodukte $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ und $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ für:

i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$

ii) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 0+2 \\ 6-1 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 0+2 \\ 1+3 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

b) i)

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\
(\mathbf{AB})\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{BC} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$!

ii)

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \\
(\mathbf{AB})\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix} \\
\mathbf{BC} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also: $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$!