Aufgabe 58: Lösen Sie folgende inhomogene Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus. Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Ker}(\mathbf{A})$ und $\text{Bild}(\mathbf{A})$, wenn $\mathbf{A}$ die Koeffizientenmatrix der Gleichungssysteme bezeichnet:

$$a)\quad \begin{array}{rcr} x_1+x_2+x_3 &=& 1\\ 2x_1-x_2+x_3 &=& 0\\ 5x_1-x_2+3x_3 &=& 1\\ x_1-2x_2 &=& -1 \end{array} \qquad b)\quad \begin{array}{rcr} x_1+2x_2+5x_3+x_4 &=& 2\\ x_1-x_2-x_3-2x_4 &=& -1\\ x_1+x_2+3x_3 &=& \lambda \end{array}$$

Lösung: Um eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems zu erhalten, wird der Gauß'sche Algorithmus auf die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite angewendet. Der Kern wurde definiert als $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Somit ist zur Bestimmung einer Basis das homogene Gleichungssystem (also mit $\mathbf{0}$ anstatt der bisherigen rechten Seite) zu lösen. Für das Bild ist zu beachten, dass der Bildraum von den Spalten der Koeffizientenmatrix aufgespannt wird. Um eine Basis zu bestimmen, müssen evtl. linear abhängige Spalten identifiziert werden.

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr|lll} x_1 &+& x_2 &+& x_3 &=& 1 & \cdot(-2) & \cdot(-5) & \cdot(-1)\\ 2x_1 &-& x_2 &+& x_3 &=& 0 & \hookleftarrow + & & \\ 5x_1 &-& x_2 &+& 3x_3 &=& 1 & & \hookleftarrow + & \\ x_1 &-& 2x_2 &+& 0 &=& -1 & & & \hookleftarrow + \\ \hline x_1 &+& x_2 &+& x_3 &=& 1 & & & \\ 0 &-& 3x_2 &-& x_3 &=& -2 & \cdot(-2) & & \\ 0 &-& 6x_2 &-& 2x_3 &=& -4 & \hookleftarrow & \cdot(-1) & \\ 0 &-& 3x_2 &-& x_3 &=& -2 & & \hookleftarrow + & \\ \hline x_1 &+& x_2 &+& x_3 &=& 1 & & & \\ 0 &-& 3x_2 &-& x_3 &=& -2 & & & \\ 0 &+& 0 &+& 0 &=& 0 & & & \\ 0 &+& 0 &+& 0 &=& 0 & & & \end{array}$$

Lösung des homogenen Gleichungssystems:

$$-3x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -3x_2$$
$$x_1 + x_2 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

$$\Longrightarrow \text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -3 \end{pmatrix}\right\}$$

Zur Überprüfung der linearen Abhängigkeit werden Spaltenumformungen verwendet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 5 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & -1\\ 5 & -6 & -2\\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \text{Bild}(\mathbf{A}) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Das inhomogene Gleichungssystem hat mehrere Lösungen, z. B. $\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$. Die gesamte Lösungsmenge hat die Form $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}$

b)

$$\begin{array}{ccccccccccl}
x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 2 & & \cdot(-1) \\
x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 & & \hookleftarrow + \\
x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 0 & = & \lambda & & \hookleftarrow + \\
\hline
x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 2 & & \\
0 & - & 3x_2 & - & 6x_3 & - & 3x_4 & = & -3 & & \cdot(-\frac{1}{3}) \\
0 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & \lambda - 2 & & \hookleftarrow + \\
\hline
x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 2 & & \\
0 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 & & \\
0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & = & \lambda - 1 & &
\end{array}$$

Lösung des homogenen Gleichungssystems:

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_3 - x_4$$
$$x_1 - 4x_3 - 2x_4 + 5x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 + x_4$$

Wähle einmal $x_3 = 1$ und $x_4 = 0$ und einmal $x_4 = 1$ und $x_3 = 0$. $\Longrightarrow \text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Die Spalten stimmen mit den Zeilen aus Aufgabenteil d) überein. $\Longrightarrow \text{Bild}(\mathbf{A}) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}\right\}$

Das inhomogene Gleichungssystem hat im Falle $\lambda \neq 1$ keine Lösung, ansonste mehrere, z. B. $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$. Die gesamte Lösungsmenge hat die Form

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Aufgabe 59: Wir betrachten ein Parallelepiped $\mathbf{P}$, welches von den drei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ aufgespannt wird. Zusätzlich ist eine affine Abblidung

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann ist $f(\mathbf{P})$ wieder ein Parallelepiped (Warum?).

a) Geben Sie die drei Vektoren an, die das Parallelepiped $f(\mathbf{P})$ aufspannen.

b) Zeigen Sie, dass für das Volumen des Parallelepipeds $f(\mathbf{P})$ gilt

$$\operatorname{vol} f(\mathbf{P}) = |\det \mathbf{A}| \cdot |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| = |\det \mathbf{A}| \cdot \operatorname{vol}(\mathbf{P}).$$

c) Berechnen Sie für

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

das Volumen von $\mathbf{P}$ $\operatorname{vol}(\mathbf{P})$, sowie das Volumen von $f(\mathbf{P})$ $\operatorname{vol}(f(\mathbf{P}))$. Berechnen Sie $\operatorname{vol}(f(\mathbf{P}))$ einmal mit Hilfe der im vorigen Aufgabenteil angegeben Formel, als auch auf direktem Weg, indem sie zuerst $f(\mathbf{u})$, $f(\mathbf{v})$ und $f(\mathbf{w})$ berechnen.

LÖSUNG:

a) Das Parallelepiped $\mathbf{P}$ wird aufgespannt von den drei Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, d.h.

$$\mathbf{P} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \; : \; \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v} + \lambda_3 \mathbf{w}, \text{ wobei } \lambda_i \in [0,1] \text{ für } i = 1,2,3\}.$$

Das Parallelepiped $f(\mathbf{P})$ wird also aufgespannt von den drei Vektoren $f(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$, $f(\mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ und ist gegeben durch

$$f(\mathbf{P}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \; : \; \mathbf{y} = \lambda_1 f(\mathbf{u}) + \lambda_2 f(\mathbf{v}) + \lambda_3 f(\mathbf{w}), \text{ wobei } \lambda_i \in [0,1] \text{ für } i = 1,2,3\}.$$

b) Für das Volumen des Parallelepipeds $f(\mathbf{P})$ gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(\mathbf{P}) &= |\det \underbrace{(f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}))}_{\text{Matrix mit Spalten } f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})}| \\
&= |\det(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{w})| \\
&= |\det(\mathbf{A} \cdot \underbrace{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}_{\text{Matrix mit Spalten } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}})| \\
&= |\det \mathbf{A} \cdot \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \\
&= |\det \mathbf{A}| \cdot |\underbrace{\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}_{= \operatorname{vol} \mathbf{P}}|
\end{aligned}$$

c) Das Volumen von $\mathbf{P}$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(\mathbf{P}) &= |\det(u, v, w)| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \right| \\
&\text{(Zeile II' = Zeile II - Zeile I; Zeile III' = Zeile III - 3Zeile I)} \\
&= \left| (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \right| \\
&\text{(entwickelt nach erster Spalte)} \\
&= |-2 + 12| = |10| = 10.
\end{aligned}$$

Für die Berechnung von $\operatorname{vol}(f(\mathbf{P}))$ benutzen wir zuerst die Formel aus dem vorherigen Aufgabenteil

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(f(\mathbf{P})) &= |\det \mathbf{A}| \cdot \operatorname{vol}(\mathbf{P}) \\
&= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10 \\
&= 6 \cdot 10 \\
&= 60.
\end{aligned}$$

Man kann aber auch erst die Vektoren $f(\mathbf{u})$, $f(\mathbf{v})$ und $f(\mathbf{w})$ berechnen

$$f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und anschließend $\operatorname{vol}(f(\mathbf{P}))$ berechnen

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(f(\mathbf{P})) &= \left| \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 9 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix} \right| \\
&= 5 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 9 \cdot 9 + 6 \cdot 5 \cdot (-3) - 9 \cdot 3 \cdot 6 - (-3) \cdot 9 \cdot 5 - 3 \cdot 5 \cdot 2 \\
&= 45 + 162 - 90 - 162 + 135 - 30 \\
&= 60.
\end{aligned}$$

Aufgabe 60: Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 10 \\ 3 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{pmatrix},$$

$$\text{Zusatzaufgabe e)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 8 & 14 & 20 & 26 \\ 4 & 11 & 20 & 30 & 40 \\ 5 & 14 & 26 & 40 & 55 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 10 \\ 3 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 10 \end{pmatrix} &= (-1)^{3+2}(-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 5 \\ 5 & -1 & 10 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(entwickelt nach der 2ten Spalte)} \\
&= \det \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 5 \\ 5 & -1 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-1)} \cdot \frac{1}{7} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ -3 & -7 & -5 \\ 35 & -7 & 70 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(Zeile II = (-1) Zeile II,} \\
&\quad \text{Zeile III = 7 Zeile III)} \\
&= -\frac{1}{7} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 1 & 0 & 5 \\ 39 & 0 & 80 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(Zeile II = Zeile II + Zeile I,} \\
&\quad \text{Zeile III = Zeile III + Zeile I)} \\
&= -\frac{1}{7} \cdot (-1)^{1+2} \cdot 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 39 & 80 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(entwickelt nach der 2ten Spalte)} \\
&= 80 - 5 \cdot 39 = 5 \cdot (16 - 39) \\
&= 5 \cdot (-23) = -115
\end{aligned}$$

b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass sich die Determinante einer rechten oberen Dreiecksmatrix berechnen lässt, indem man das Produkt der Diagonaleinträge berechnet:

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120.$$

c) Offensichtlich gilt die Regel auch für linke untere Dreieckmatrizen, so dass sich die Determinante wie folgt berechnet:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120.$$

d) Die Determinante dieser Matrix berechnen wir, indem wir die Matrix mittels Gaußschem Eliminationsverfahren auf die Gestalt einer rechten oberen Dreiecksmatrix bringen.

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \quad \mid \cdot (-2) & \quad \mid \cdot (-3) & \quad \mid \cdot (-4) \\
2 & 5 & 8 & 11 & \hookleftarrow + & & \\
3 & 8 & 14 & 20 & & \hookleftarrow + & \\
4 & 11 & 20 & 30 & & & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & \quad \mid \cdot (-2) & \quad \mid \cdot (-3) & \\
0 & 2 & 5 & 8 & \hookleftarrow + & & \\
0 & 3 & 8 & 14 & & \hookleftarrow + & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & \quad \mid \cdot (-2) & & \\
0 & 0 & 2 & 5 & \hookleftarrow + & & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & &
\end{array}$$

Nun sehen wir, dass wir die Determinante in diesem speziellen Fall sogar einfach ablesen können, da sie 1 ist.

e) Analog zum vorherigen Teil ergibt sich:

$$
\begin{array}{ccccc|llll}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & | \cdot (-2) & | \cdot (-3) & | \cdot (-4) & | \cdot (-5) \\
2 & 5 & 8 & 11 & 14 & \hookleftarrow + & & & \\
3 & 8 & 14 & 20 & 26 & & \hookleftarrow + & & \\
4 & 11 & 20 & 30 & 40 & & & \hookleftarrow + & \\
5 & 14 & 26 & 40 & 55 & & & & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & | \cdot (-2) & | \cdot (-3) & | \cdot (-4) & \\
0 & 2 & 5 & 8 & 11 & \hookleftarrow + & & & \\
0 & 3 & 8 & 14 & 20 & & \hookleftarrow + & & \\
0 & 4 & 11 & 20 & 30 & & & \hookleftarrow + & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & | \cdot (-2) & | \cdot (-3) & & \\
0 & 0 & 2 & 5 & 8 & \hookleftarrow + & & & \\
0 & 0 & 3 & 8 & 14 & & \hookleftarrow + & & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & | \cdot (-2) & & & \\
0 & 0 & 0 & 2 & 5 & \hookleftarrow + & & & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}
$$

Die Determinante ist 1.

Aufgabe 61: Rechnen Sie nach, dass sich die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit folgender Regel berechnen lässt:

$$
\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}
\end{aligned}
$$

LÖSUNG: Um die Regel nachzurechnen, entwickeln wir die Determinante nach der ersten Spalte

$$
\begin{aligned}
\det A &= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\quad +(-1)^{3+1} a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + (-1)^{2+1} a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) \\
&\quad +(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}
\end{aligned}
$$

Achtung: Die Berechnung von 4×4-Determinanten funktioniert *nicht* völlig analog, hier egeben sich insgesamt 24 Summanden (mit einer nicht ganz so regelmäßigen Struktur) mit je 4 Faktoren.