

**Aufgabe 4:** Betrachten Sie die Fläche  $\mathcal{S}$ , welche durch  $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$x(v, w) = \begin{pmatrix} (R + r \cos w) \cos v \\ (R + r \cos w) \sin v \\ r \sin w \end{pmatrix},$$

und  $\Omega := [0, 2\pi]^2$  parametrisiert (mit Radii  $R > r > 0$ ).  
Berechnen Sie den Flächeninhalt von  $\mathcal{S}$ .

LÖSUNG: Es gilt  $G = Dx^T Dx$ , wobei

$$Dx(v, w) = \left( \partial_v x \mid \partial_w x \right) = \begin{pmatrix} -(R + r \cos w) \sin v & -r \cos v \sin w \\ (R + r \cos w) \cos v & -r \sin v \sin w \\ 0 & r \cos w \end{pmatrix}$$

also

$$Dx(v, w)^T Dx(v, w) = \begin{pmatrix} (R + r \cos w)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist  $\sqrt{\det G(v, w)} = r(R + r \cos w)$ .

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt}(\mathcal{S}) &= \int_{\mathcal{S}} da = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\det G(v, w)} \, dv \, dw \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos w) \, dv \, dw \\ &= 2\pi(2\pi r R + \int_0^{2\pi} r^2 \cos w \, dw) \\ &= 4\pi^2 r R. \end{aligned}$$