

**Aufgabe 7:** Betrachten Sie eine Drehmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

und Spiegelungsmatrizen der Form

$$B = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

- Berechnen Sie die Matrix  $AB$ .
- Berechnen Sie die Matrix  $BC$ .
- Da  $A$ ,  $B$  und  $C$  in  $O(2)$  liegen, sind auch die beiden Matrizen  $AB$  und  $BC$  orthogonal. Handelt es sich bei  $AB$  bzw.  $BC$  jeweils um eine Drehung oder Spiegelung?

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma \\ \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos(-\gamma) - \sin \beta \sin(-\gamma) & -\cos \beta \sin(-\gamma) - \sin \beta \cos(-\gamma) \\ \sin \beta \cos(-\gamma) + \cos \beta \sin(-\gamma) & -\sin \beta \sin(-\gamma) + \cos \beta \cos(-\gamma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta - \gamma) & -\sin(\beta - \gamma) \\ \sin(\beta - \gamma) & \cos(\beta - \gamma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Bei der Matrix  $AB$  handelt es sich um eine Spiegelung und bei der Matrix  $BC$  handelt es sich um eine Drehung.