

Aufgabe 9: Berechnen Sie die Länge zweier Kurven auf der Erdoberfläche (im Kugelmodell), die St. Petersburg ($60^\circ N, 30^\circ O$) mit Anchorage in Alaska ($60^\circ N, 150^\circ W$) verbinden.

- Geben Sie die Koordinaten φ und ϑ (bzgl. der Parametrisierung aus der Vorlesung) der beiden Punkte im Bogenmaß an.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang des gemeinsamen Breitenkreises verbindet.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang zweier Meridiane über den Nordpol verbindet. Hinweis: Im Parameterbereich besteht die Kurve aus zwei Teilen.
- Berechnen Sie die Länge der beiden Kurven.

Aufgabe 10: Betrachten Sie einen durch

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} h \cos \phi \\ h \sin \phi \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ und $h \in (0, 1]$ parametrisierten Kegel.
In welchem Winkel schneiden sich die "Breitenkreise"

$$b : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 : \quad b(t) = x(t, h_0) \quad \text{für festes } h_0 \in (0, 1]$$

mit den "Meridianen"

$$m : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \quad m(t) = x(\phi_0, t) \quad \text{für festes } \phi_0 \in [0, 2\pi)?$$

Tipp: Verwenden Sie die Metrik.

Aufgabe 11: Gegeben sei die Parametrisierung

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\phi) \\ \sin(2\pi\phi) \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 1)$ und $h \in [0, 1]$.

- a) Welche Hyperfläche beschreibt diese Parametrisierung?
- b) Betrachten Sie die Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, & t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & t \in [0, 1] \end{aligned}$$

im Parameterbereich. Beschreiben Sie die Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$, die auf der parametrisierten Fläche liegen.

- c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser beiden Kurven zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$.
- d) Berechnen Sie in diesem Punkt einen Normalenvektor an die Fläche.
- e) Berechnen Sie den metrischen Tensor auf dieser Fläche.
- f) Verwenden Sie den metrischen Tensor, um die Länge der beiden Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$ auf der Fläche zu berechnen.
- g) In welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven?

Aufgabe 12: Betrachten Sie die Fläche \mathcal{S} , welche durch die Abbildung $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$x(v, w) = \begin{pmatrix} (R + r \cos w) \cos v \\ (R + r \cos w) \sin v \\ r \sin w \end{pmatrix}$$

und $\Omega := [0, 2\pi]^2$ parametrisiert (mit Radii $R > r > 0$).

- a) Skizzieren Sie die Fläche \mathcal{S} (Tipp: Betrachten Sie die Kurven $h(t) = x(a, t)$ und $v(t) = x(t, a)$ für $a = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$).
- b) Berechnen Sie den metrischen Tensor $G(v, w) \in \mathbb{R}^{2,2}$.
- c) Berechnen Sie die Normale $N(v, w) \in \mathbb{R}^3$.

Betrachten Sie nun die Kurve $c : [0, 1] \rightarrow \Omega$ im Parametergebiet, definiert durch

$$c : \xi \mapsto \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\xi\right)$$

und die Raumkurve $\gamma = x \circ c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

- d) Berechnen Sie die Länge der Kurve γ .