Aufgabe 21: Gegeben seien zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zeigen Sie:

a) Sind beide Matrizen A und B orthognal, so ist auch die Matrix AB orthogonal.

b) Ist die Matrix A orthogonal, dann gilt $|\det A| = 1$.

Aufgabe 22: a) Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und die beiden Vektoren $x = (1,0,1)^T$, $y = (0,1,1)^T$.

Zeigen Sie, dass der Winkel $\phi := \sphericalangle(x,y)$ zwischen x und y, definiert durch $\cos\phi := \frac{x \cdot y}{||x|| \ \ ||y||}$, gleich dem Winkel $\psi := \sphericalangle(Ax, Ay)$ zwischen Ax und Ay ist.

b) Eine 3×3 Matrix A heißt winkeltreu, falls A invertierbar ist und

$$|\sphericalangle(Ax, Ay)| = |\sphericalangle(x, y)|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt. Zeigen Sie, dass jede Matrix A der Form $A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ winkeltreu ist.

c) Die Matrix A aus Aufgabenteil a) kann in der Form $A = \lambda Q$ geschrieben werden, wobei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $Q \in O(3)$. Berechnen Sie diese λ und Q.
Tipp: Berechnen Sie $|\det A|$ unter Berücksichtigung der Tatsache, dass sich die Matrix A schreiben läßt als $A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$.

Aufgabe 23: Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Eigenwerte einer Drehmatrix sind stets ± 1.
ja □ nein □

b) Die Eigenwerte einer Spiegelungsmatrix sind stets ± 1.
ja □ nein □

c) Die Eigenwerte einer beliebigen orthogonalen Matrix sind stets ± 1.
ja □ nein □

d) Die Determinante einer beliebigen orthogonalen Matrix ist ± 1.
ja □ nein □

e) Jede längentreue (d.h. orthogonale) lineare Abbildung ist auch winkeltreu.
ja □ nein □

f) Jede winkeltreue lineare Abbildung ist auch längentreu.
ja □ nein □

Aufgabe 24: Es seien u, $v \in \mathbb{R}^d$ mit $u \neq v$ und $||u|| = ||v||$. Weiter sei $n := u - v$.

a) Zeigen Sie, dass für die durch $S_n x := x - 2\frac{x \cdot n}{||n||^2} n$ definierte Spiegelungsmatrix S_n gilt $S_n u = v \quad$ und $\quad S_n v = u$.

b) Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie v der Form $v = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\|u\| = \|v\|$. Berechnen Sie die Matrix S_{u-v} aus Aufgabenteil (a).

c) Multiplizieren Sie diese Matrix von links an die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$