

Aufgabe 34: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x, & x \in [0, \pi), \\ 2 - \frac{1}{\pi}x, & x \in [\pi, 2\pi), \\ f(x - 2k\pi), & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ für $x \in [-2\pi, 4\pi]$.
b) Berechnen Sie die ersten 4 Fourierkoeffizienten dieser Funktion, d.h. berechnen Sie

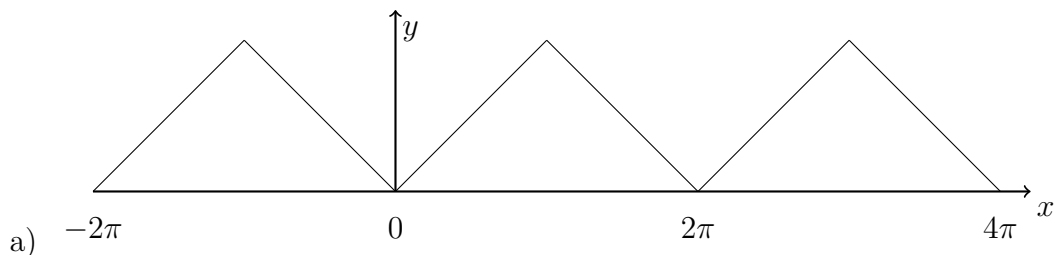
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

und für $k = 1, \dots, 4$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

- c) Argumentieren Sie, warum $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

LÖSUNG:



- a) -2π 0 2π 4π
b) Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} x dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 2 - \frac{1}{\pi} x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} x^2 \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[2x - \frac{1}{2\pi} x^2 \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \pi^2 - 0 + \frac{2}{\pi} 2\pi - \frac{2}{\pi} \pi - \frac{1}{2\pi^2} (2\pi)^2 + \frac{1}{2\pi^2} (\pi)^2 = 1. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir für $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \stackrel{y=kx}{=} \frac{1}{k\pi} \int_0^{2k\pi} f\left(\frac{y}{k}\right) \cos(y) dy \\
 &= \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{k\pi} y \cos(y) dy + \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{2k\pi} \left(2 - \frac{1}{k\pi} y\right) \cos(y) dy \\
 &= \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{k\pi} y \cos(y) dy + \frac{2}{k\pi} \int_{k\pi}^{2k\pi} \cos(y) dy - \frac{1}{k^2\pi^2} \int_{k\pi}^{2k\pi} y \cos(y) dy \\
 &\quad \text{partielle Integration} \\
 &= \frac{1}{k^2\pi^2} [y \sin(y) + \cos(y)]_0^{k\pi} + \frac{2}{k\pi} [\sin(y)]_{k\pi}^{2k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2} [y \sin(y) + \cos(y)]_{k\pi}^{2k\pi} \\
 &= \frac{1}{k^2\pi^2} \left[\underbrace{k\pi \sin(k\pi)}_{=0} + \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} - (0 \cdot \sin(0) + \underbrace{\cos(0)}_{=1}) \right] + \frac{2}{k\pi} \left[\underbrace{\sin(2k\pi) - \sin(k\pi)}_{=0} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{k^2\pi^2} \left[\underbrace{2k\pi \sin(2k\pi)}_{=0} + \underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} - \left(\underbrace{k\pi \sin(k\pi)}_{=0} + \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{k^2\pi^2} [(-1)^k - 1] - \frac{1}{k^2\pi^2} [1 - (-1)^k] = \frac{2}{k^2\pi^2} (-1 + (-1)^k).
 \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{4}{\pi^2}, \\
 a_2 &= 0, \\
 a_3 &= -\frac{4}{9\pi^2}, \\
 a_4 &= 0.
 \end{aligned}$$

c) Argumentativ können wir analog zur Vorlesung feststellen:

- i) wg. periodisch: $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$
- ii) $f(-x) = f(x)$: gerade /symmetrisch zur y -Achse
- iii) $\sin(-kx) = -\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung
- iv) $f(-x) \sin(-kx) = -f(x) \sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung
- v) $\int_{-\pi}^{\pi}$ ungerade Funktion $dx = 0$

Alternativ können wir für $k \in \mathbb{Z}$ aber auch die b_k folgendermaßen berechnen

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \stackrel{y=kx}{=} \frac{1}{k\pi} \int_0^{2k\pi} f\left(\frac{y}{k}\right) \sin(y) dy \\
 &= \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{k\pi} y \sin(y) dy + \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{2k\pi} \left(2 - \frac{1}{k\pi}y\right) \sin(y) dy \\
 &= \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{k\pi} y \sin(y) dy + \frac{2}{k\pi} \int_{k\pi}^{2k\pi} \sin(y) dy - \frac{1}{k^2\pi^2} \int_{k\pi}^{2k\pi} y \sin(y) dy \\
 &\quad \text{partielle Integration} \\
 &= \frac{1}{k^2\pi^2} [-y \cos(y) + \sin(y)]_0^{k\pi} + \frac{2}{k\pi} [-\cos(y)]_{k\pi}^{2k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2} [-y \cos(y) + \sin(y)]_{k\pi}^{2k\pi} \\
 &= \frac{1}{k^2\pi^2} \left[\underbrace{-k\pi \cos(k\pi)}_{=(-1)^k} + \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} - (0 \cdot \cos(0) + \underbrace{\sin(0)}_{=0}) \right] + \frac{2}{k\pi} \left[\underbrace{-\cos(2k\pi)}_1 + \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{k^2\pi^2} \left[\underbrace{-2k\pi \cos(2k\pi)}_{=1} + \underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0} - (\underbrace{-k\pi \cos(k\pi)}_{=(-1)^k} + \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}) \right] \\
 &= \frac{1}{k^2\pi^2} [-k\pi(-1)^k] - \frac{1}{k^2\pi^2} [-2k\pi + k\pi(-1)^k] + \frac{2}{k\pi} [-1 + (-1)^k] \\
 &= \frac{1}{k\pi} [-(-1)^k + 2 - (-1)^k - 2 + 2(-1)^k] = 0.
 \end{aligned}$$

- Aufgabe 35:**
- Es sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit Periode 2π und Lipschitz-stetig. Geben Sie die Fourierdarstellung (einschließlich der Formeln zur Berechnung der Koeffizienten) von g an.
 - Angenommen die Funktion g wäre nun π periodisch. Gilt die Fourierdarstellung weiterhin?
 - Betrachten Sie nun die spezielle Funktion

$$f(x) = \sin^2(x).$$

Begründen Sie, warum für die Fourierkoeffizienten b_k aus der Vorlesung für alle $k \geq 1$ gilt $b_k = 0$.

- Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_1 und a_2 aus der Vorlesung für $f(x)$ (Tipp: Verwenden Sie zur Berechnung von a_2 : $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$). Warum gilt dies?).

LÖSUNG:

- Die Fourierdarstellung von g lautet:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

wobei

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cos(kx) dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin(kx) dx.$$

b) Da g dann π periodisch ist, ist g auch 2π periodisch und damit gilt die Fourierdarstellung noch immer.

c) Argumentativ können wir analog zur Vorlesung feststellen:

i) wg. periodisch: $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$

ii) $f(-x) = f(x)$: gerade /symmetrisch zur y -Achse

iii) $\sin(-kx) = -\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

iv) $f(-x) \sin(-kx) = -f(x) \sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

v) $\int_{-\pi}^{\pi}$ ungerade Funktion $dx = 0$

d) Zunaechst stellen wir durch partielle Integration für a_0 fest

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x) \cdot \sin(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} [-\sin(x) \cdot \cos(x)]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\cos(x) \cdot \cos(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} [-\sin(x) \cdot \cos(x)]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 - \sin^2(x) dx. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$2a_0 = \frac{1}{\pi} [-\sin(x) \cdot \cos(x)]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx = 2, \quad a_0 = 1.$$

Kommen wir nun zu a_1 . Hier gilt

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(x) \cos(x) dx \quad \underbrace{=} \quad \frac{1}{\pi} \int_{\sin(0)}^{\sin(2\pi)} y^2 dy = 0.$$

Subst. $y=\sin(x)$

Kommen wir nun zu a_2 . Hier gilt

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(x) \cos(2x) dx \quad \stackrel{\sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))}{=} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2x) - \cos^2(2x) dx \\
 &\stackrel{\cos^2(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))}{=} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2x) - \left(\frac{1}{2}(1+\cos(4x))\right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x) dx \\
 &= -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Hierbei gilt:

$$1 - \cos(2x) = 1 - (\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 1 - (1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)) = 2 \sin^2(x).$$

Aufgabe 36: Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

- a) Die Funktion $f_1(x, y) = x^2 + y^3$ besitzt im Punkt $(0, 0)$ einen kritischen Punkt. ja nein
- b) Die Funktion $f_1(x, y) = x^2 + y^3$ hat im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Extremum. ja nein
- c) Die Funktion $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0, 0)$ einen kritischen Punkt. ja nein
- d) Die Funktion $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Minimum. ja nein
- e) Die Funktion $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0, 0)$ ein globales Minimum. ja nein

LÖSUNG: Die Antworten lauten: a) Ja! b) Nein! c) Ja! d) Ja! e) Nein!

Für a) und b) beachtet man dazu $\text{grad} f_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 \end{pmatrix}$, woraus sich ergibt, dass

$(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von f_1 ist. Wegen $D^2 f_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ und

$D^2 f_1(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sieht man, dass $D^2 f_1(0, 0)$ positiv semidefinit ist, aber für diesen Fall gilt kein allgemeines Kriterium. Aber $f_1(0, t) = t^3$ zeigt, dass es sich um einen Sattelpunkt handelt, da t^3 negativ ist für $t < 0$, $= 0$ für $t = 0$ und positiv ist für $t > 0$.

Für c), d) und e) beachtet man $\text{grad} f_2(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y - 4y^3 \end{pmatrix}$, woran man erkennt,

dass $(0, 0)$ kritischer Punkt von f_2 ist. Wegen $D^2 f_2(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - 12y^2 \end{pmatrix}$ und

$D^2 f_2(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sieht man, dass $D^2 f_2(0, 0)$ positiv definit ist, und demnach ein (lokales) Minimum bei $(0, 0)$ liegt mit dem Wert $f_2(0, 0) = 0$. Aber es gilt auch $f_2(0, \pm 1) = 0$ und $f_2(0, \pm 2) = -12$. Dies zeigt, dass es sich nicht um ein globales Minimum handelt.