Aufgabe 37: Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x,y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$$

und entscheiden Sie, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

LÖSUNG: Gesucht wird der kritische Punkt der Funktion $f(x,y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$.

a) Notwendige Bedingung: grad $f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 6x - 5y \,, \\ f_y(x,y) &= -5x - 4y \,. \end{aligned}$$

Dies liefert ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem vom Rang 2:

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,, \ \det \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = -24 - 25 = -49 \neq 0 \,.$$

$\Rightarrow$ Der einzige kritische Punkt liegt bei: $x = y = 0$ und lässt sich leicht mit Hilfe des Gauß-Algorithmus oder der inversen Matrix berechnen.

b) Zur weiteren Untersuchung des kritischen Punktes betrachtet man die Hesse-Matrix:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} =: \mathbf{A}$$

Bestimmung der Eigenwerte von $\mathbf{A}$: Die charakteristische Gleichung von $\mathbf{A}$ lautet

$$\begin{aligned} (6-\lambda)(-4-\lambda) - 25 = 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 49 \,, \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 50 &\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{50} \,. \end{aligned}$$

Es gilt deshalb: $\lambda_1 = 1 + \sqrt{50} = 1 + 5\sqrt{2} > 0$ bzw. $\lambda_2 = 1 - \sqrt{50} = 1 - 5\sqrt{2} < 0$ und, da die Eigenwerte verschiedenes Vorzeichen haben, liegt in $(0,0)$ ein Sattelpunkt mit dem Wert $f(0,0) = 3$ vor.

Man kann dies auch wie folgt einsehen: Die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(0,0)$ ist indefinit, denn es gilt ja

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

und

$$D^2 f(0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 > 0,$$

sowie

$$D^2 f(0,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 < 0.$$

Also liegt ein Sattelpunkt vor, für den gilt

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 3\ , \\ f(t,0) &= 3t^2 + 3 > 3\ , \\ f(0,t) &= -2t^2 + 3 < 3\ , \end{aligned}$$

wobei $t \neq 0$ sei.

Aufgabe 38: a) Berechnen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f_\alpha(x,y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

b) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der durch

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

gegebenen Funktion.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad} f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3\alpha y \\ -3y^2 + 3\alpha x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} \alpha y = -x^2 \\ \alpha x = y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha y = -\frac{y^4}{\alpha^2} \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y^4 + \alpha^3 y = 0 \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} y(y^3 + \alpha^3) = 0 \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (y = 0 \text{ und } x = 0) \text{ oder } (y = -\alpha \text{ und } x = \alpha) \\ &P_0 = (0,0),\ P_1 = (\alpha, -\alpha) : D^2 f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3\alpha \\ 3\alpha & -6y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für $P_0 = (0,0)$ gilt $D^2 f_\alpha(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ 3\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Eigenwerte von $D^2 f_\alpha(0,0)$: charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 9\alpha^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ &(\lambda + 3\alpha)(\lambda - 3\alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\lambda_1 = -3\alpha, \quad \lambda_2 = 3\alpha \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für $\alpha \neq 0$ gilt: $\quad \lambda_1 \lambda_2 = -9\alpha^2 < 0$

D.h. λ_1 und λ_2 haben verschiedene Vorzeichen, also ist $D^2 f_\alpha(0,0)$ indefinit und $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Im Fall $\alpha = 0$ reicht die Hessematrix nicht aus, um eine Aussage machen zu können, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunk handelt. Dazu benötigt man Ableitungen höherer Ordnung.

Für $P_1 = (\alpha, -\alpha)$ gilt $D^2 f_\alpha(\alpha, -\alpha) = \begin{pmatrix} 6\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha \end{pmatrix}$.

Eigenwerte von $D^2 f_\alpha(\alpha,-\alpha)$: charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}(6\alpha-\lambda)^2-9\alpha^2=0 \Leftrightarrow 6\alpha-\lambda &= \pm\sqrt{9\alpha^2}\\ \Leftrightarrow \lambda_1=3\alpha,\quad \lambda_2 &= 9\alpha\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $D^2 f_\alpha(\alpha,-\alpha)$ ist positiv definit für $\alpha>0$ und negativ definit für $\alpha<0$. D.h. $(\alpha,-\alpha)$ liefert $f_\alpha(\alpha,-\alpha)=\alpha^3+\alpha^3-3\alpha^3=-\alpha^3$ und ergibt ein (lokales) Minimum für $\alpha>0$ und ein (lokales) Maximum für $\alpha<0$. (Für $\alpha=0$ siehe oben.)

b)

$$\begin{aligned}&\operatorname{grad} f(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2-3\\3y^2-12\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x^2=1\\y^2=4\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=\pm1\\y=\pm2\end{array}\right\}\\ &\Rightarrow P_0=(-1,-2),\ P_1=(-1,2),\ P_2(1,-2),\ P_3(1,2)\\ &D^2 f(x,y)=\begin{pmatrix}6x&0\\0&6y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

i) Für $P_0=(-1,-2)$ gilt: $D^2 f(-1,-2)=\begin{pmatrix}-6&0\\0&-12\end{pmatrix}$ ist negativ definit.
$f(-1,-2)=-1-8+3+24+20=38\Rightarrow$ (lokales) Maximum.

ii) Für $P_1=(-1,2)$ gilt: $D^2 f(-1,2)=\begin{pmatrix}-6&0\\0&12\end{pmatrix}$ ist indefinit.
$f(-1,2)=-1+8+3-24+20=6\Rightarrow$ Sattelpunkt.
Für $P_2=(1,-2)$ gilt: $D^2 f(1,-2)=\begin{pmatrix}6&0\\0&-12\end{pmatrix}$ ist indefinit,
$f(1,-2)=1-8-3+24+20=34$
$\Rightarrow$ Sattelpunkt.

iii) Für $P_3=(1,2)$ gilt: $D^2 f(1,2)=\begin{pmatrix}6&0\\0&12\end{pmatrix}$ ist positiv definit.
$f(1,2)=1+8-3-24+20=2$
$\Rightarrow$ (lokales)Minimum.

Aufgabe 39: Betrachten Sie die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\sin(x)\cos(y)$$

und finden Sie im Intervall $[0,2\pi)\times[0,2\pi)$ Minima, Maxima und Sattelpunkte von f.

Lösung: Kritische Punkte von f sind diejenigen Punkte (x,y) mit $\nabla f(x,y)=0$.

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\cos(x)\cos(y)\\-\sin(x)\sin(y)\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow\quad\left\{\begin{array}{llll}x=\frac{\pi}{2},\ \text{oder} & x=\frac{3\pi}{2},\ \text{oder} & y=\frac{\pi}{2},\ \text{oder} & y=\frac{3\pi}{2}\\ x=0,\ \text{oder} & x=\pi,\ \text{oder} & y=0,\ \text{oder} & y=\pi\end{array}\right.$$

Die verschiedenen Möglichkeiten sind:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

$$D^2 f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ist negativ definit, d.h. } A_1 \text{ ist ein Maximum}$$
$$D^2 f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist positiv definit, d.h. } A_2 \text{ ist ein Minimum}$$
$$D^2 f\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist positiv definit, d.h. } A_3 \text{ ist ein Minimum}$$
$$D^2 f\left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ist negativ definit, d.h. } A_4 \text{ ist ein Maximum}$$
$$D^2 f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_5 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$
$$D^2 f\left(0, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_6 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$
$$D^2 f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_7 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$
$$D^2 f\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_8 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

Aufgabe 40: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Finden Sie $x_Z \in Z$, so dass

$$\|x_0 - x_Z\| \leq \|x_0 - x\|$$

für alle $x \in Z$.

a) Stellen Sie x_0 und ein beliebiges $x \in Z$ in Zylinderkoordinaten dar.

b) Geben Sie den Abstand $\|x_0 - x\|^2$ als Funktion $d(\varphi, z)$ an.

c) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $d(\varphi, z)$.

d) Berechnen Sie die Hessematrix von $d(\varphi, z)$.

e) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $d(\varphi, z)$.

LÖSUNG:

a)

$$x_0 = \begin{pmatrix} r_0 \cos\varphi_0 \\ r_0 \sin\varphi_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} d(\varphi, z) &= \|x_0 - x\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} r_0 \cos\varphi_0 - \cos\varphi \\ r_0 \sin\varphi_0 - \sin\varphi \\ z_0 - z \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (r_0 \cos\varphi_0 - \cos\varphi)^2 + (r_0 \sin\varphi_0 - \sin\varphi)^2 + (z_0 - z)^2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \partial_\varphi d(\varphi, z) &= 2\,(r_0 \cos\varphi_0 - \cos\varphi) \sin\varphi + 2\,(r_0 \sin\varphi_0 - \sin\varphi)\,(-\cos\varphi) \\ &= 2r_0 \cos\varphi_0 \sin\varphi - 2\cos\varphi \sin\varphi - 2r_0 \sin\varphi_0 \cos\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi \\ &= 2r_0\,(\cos\varphi_0 \sin\varphi - \sin\varphi_0 \cos\varphi) \\ &= 2r_0\,(\cos(-\varphi_0) \sin\varphi + \sin(-\varphi_0) \cos\varphi) \\ &= 2r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ \partial_z d(\varphi, z) &= -2\,(z_0 - z) \end{aligned}$$

Betrachte nun

$$\nabla d(\varphi, z) = 0.$$

Für $r_0 \neq 0$ ist dies äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 2r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ 2\,(z - z_0) \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi = \varphi_0 \text{ oder } \varphi_0 + \pi \text{ und } z = z_0$$

$\Rightarrow$ (φ_0, z_0) und $(\varphi_0 + \pi, z_0)$ sind kritische Punkte der Funktion $d(\varphi, z)$.

Im Fall $r_0 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} 2r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ 2\,(z - z_0) \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,(z - z_0) \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = z_0$$

Kritische Punkte sind in diesem Fall also alle Punkte (φ, z_0) mit $\varphi \in [0, 2\pi]$.

d)

$$D^2 d(\varphi, z) = \begin{pmatrix} 2r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e) $\underline{r_0 \neq 0}$

$$\begin{aligned} D^2 d(\varphi_0, z_0) &= \begin{pmatrix} 2r_0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ist positiv definit} \ \Rightarrow \ \text{Minimum} \\ D^2 d(\varphi_0 + \pi, z_0) &= \begin{pmatrix} -2r_0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ist indefinit} \ \Rightarrow \ \text{Sattelpunkt} \end{aligned}$$

Im Fall $r_0 \neq 0$ gilt

$$x_Z = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Im Fall $r_0 = 0$ ist die Matrix $D^2 d$ positiv semidefinit, so dass wir keine allgemeine Aussage machen können. Allerdings gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} d(\varphi, z) &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + (z_0 - z)^2 \\ &= 1 + (z_0 - z)^2 , \end{aligned}$$

d.h. der Abstand hängt nicht mehr von φ sondern nur noch von z ab. Da für $d(z) = d(\varphi, z)$ die zweite Ableitung $d''(z) = 2$ größer Null ist, handelt es sich bei allen kritischen Punkten um Minima. Es gibt in diesem Fall also nicht nur einen Punkt x_z, der auf dem Zylinder Z liegt und minimalen Abstand zum Punkt x_0 hat sondern eine Menge M_Z von Punkten, die alle auf Z liegen und minimalen Abstand zum Punkt x_0 haben.

$$M_Z = \{(\varphi, z_0) \,|\, \varphi \in [0, 2\pi]\}$$