Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 1.

Abgabe am **18. Oktober vor der Vorlesung**.

Bitte beachten: Die Abgabe der Übungsblätter soll in Gruppen von jeweils 3 Studierenden erfolgen.

Aufgabe 1. a. **(Eindeutigkeit der QR-Zerlegung)** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit vollem Rang. Seien ferner reduzierte QR-Zerlegungen

$$A = \hat{Q}_1 \hat{R}_1 = \hat{Q}_2 \hat{R}_2$$

gegeben, derart, dass die Diagonalelemente von $\hat{R}_1$ bzw. $\hat{R}_2$ positiv sind.

Zeigen Sie, dass $\hat{Q}_1 = \hat{Q}_2$ und $\hat{R}_1 = \hat{R}_2$ gilt.

b. **(Rang-1 Matrizen)** Sei $A = uv^T$ mit Vektoren $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, $u, v \neq 0$. Bestimmen Sie die Eigenwerte- und -vektoren, die Operatornorm von A bzgl. der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ und geben Sie die QR-Zerlegung von A an.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 2. Gegeben seien die Funktionen $p_0, p_1, p_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $p_0(x) := 1$, $p_1(x) := x$, $p_2(x) := x^2$. Der Vektorraum $V := \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \{p_0, p_1, p_2\}$ sei ausgestattet mit dem durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{[0,1]} f(x)g(x), \qquad f, g \in V,$$

gegebenen Skalarprodukt. (Ein Nachweis der Skalarprodukt-Eigenschaft ist hier nicht erforderlich.)

Berechnen Sie von (p_0, p_1, p_2) ausgehend mittels Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis (q_0, q_1, q_2) von V.

(3 Punkte)

Aufgabe 3. (Lineare Ausgleichsprobleme)

Gegeben seien Punkte $(x_1, y_1), ..., (x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$. Gesucht wird ein Polynom p vom Grad $\leq n$, d.h.

$$p(z) := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n,$$

das unter allen solchen Polynomen vom Grad $\leq m$ den Least-Squares Fehler

$$LS(p) := \sum_{i=1}^{m} (p(x_i) - y_i)^2$$

minimiert.

a. Formulieren Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem

   Hinweis: Gesucht ist der Koeffientenvektor $(c_0, ..., c_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$.

b. Sei $m = n + 1$. Unter welcher Bedingung existiert eine eindeutige Lösung des Ausgleichsproblems? Was kann dann über den optimalen Least-Squares Fehler ausgesagt werden?

c. Geben Sie die Lösung des Ausgleichsproblems for $m = 4$, $n = 2$ und folgende (x, y)-Punkte an:

$$(-2, 2), (-1, 3), (1, 3), (2, -2).$$

   Hinweis: Normalengleichung

(1+2+3 Punkte)