Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 11.

Abgabe am **11. Januar vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit. In manchen Anwendungen tritt anstelle des bisher behandelten Eigenwertproblems ein sog. *verallgemeinertes Eigenwertproblem* auf: Wir nennen $\lambda \in \mathbb{R}$ verallgemeinerten Eigenwert, wenn

$$Ax = \lambda Bx$$

mit einem $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ("verallgemeinerter Eigenvektor") gilt. Mit $\lambda_{\min}$ bzw. $\lambda_{\max}$ bezeichnen wir den kleinsten bzw. größten verallgemeinerten Eigenwert.

a) Charakterisieren Sie die verallgemeinerten Eigenwerte als (normale) Eigenwerte einer geeigneten Matrix. Was folgt daraus für die verallgemeinerten Eigenwerte bzw. Eigenvektoren?

b) Zeigen Sie, dass die Rayleigh-Quotienten Formel in Form von

$$\lambda_{\min} = \min_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle Bx, x\rangle} \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda_{\max} = \max_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle Bx, x\rangle}.$$

auch für verallgemeinerte Eigenwerte richtig bleibt.

(3 + 3 = 6 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit nichtnegativen Einträgen ("$A \geq 0$") primitiv. Definiere

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \min_{\substack{i=1,\dots,n \\ x_i\neq 0}} \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

und

$$N := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : x \geq 0\}.$$

Mit $\lambda = \rho(A)$ bezeichnen wir den Perron-Eigenwert von A.

a) Zeigen Sie:

$$\lambda = \max_{x\in N} f(x) = \max_{\substack{x\geq 0 \\ x\neq 0}} \min_{\substack{i=1,\dots,n \\ x_i\neq 0}} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

b) Zeigen Sie ferner

$$\min_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \lambda \leq \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Hinweis: Die linke Ungleichung kann aus a) gefolgert werden.

c) Beweisen Sie, dass

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{\lambda^k} = vw^T$$

gilt, wobei $v, w \in \mathbb{R}^n$ Rechts- bzw. Links-Eigenvektoren von A zum Perron-Eigenwert λ sind, die auf $w^T v = 1$ skaliert sind.

Hinweis: Jordan-Normalform.

(3 + 3 + 4 = 10 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit nichtnegativen Einträgen (“$A \geq 0$”). Zeigen Sie folgendes Kriterium aus der Vorlesung: Existiert $m \in \mathbb{N}$, sodass A^m nur positive Einträge besitzt (“$A^m > 0$”), so ist A primitiv.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. Bearbeiten Sie die im jupyter notebook bereitgestellte Programmieraufgabe V. Dies ist die letzte Programmieraufgabe, d.h. es können insgesamt 119 Punkte in den Programmieraufgaben erreicht werden. Für die Klausurzulassung **hinreichend** sind somit 60 Punkte.

Sollten Sie noch nicht genügend Punkte in den Programmieraufgaben I bis IV gesammelt haben, gibt es zwei Bonusaufgaben, mit denen Sie Ihren Punktestand aufbessern können. Natürlich kann der Inhalt dieser beiden Aufgaben (Veranschaulichung der Approximationseigenschaften der Singulärwertzerlegung bzw. Perron-Cluster Cluster Analysis) auch für alle anderen Studierenden von Interesse sein.

(24 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe V bzw. der Bonusaufgaben findet in der Woche vom 14. bis 18. Januar in den CIP-Pools statt.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!