Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 12.

Abgabe am **17. Januar vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. Gegeben Sei das uneigentliche Integral

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}\,dx,$$

d.h. wir verwenden das Interval $[a,b] = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$ und hierauf die Gewichtsfunktion $\rho(x) := e^{-x^2}$. Man beachte, dass $I(\cdot)$ mindestens auf der Menge aller Polynome wohldefiniert ist.
Nun soll $I(\cdot)$ durch m-punktige Gauss–Quadratur approximiert werden. Die Orthogonalpolynome zur Gewichtsfunktion ρ über $\mathbb{R}$ sind die sog. *Hermite–Polynome*.

a) Berechnen Sie die ersten drei Hermite-Polynome H_0, H_1, H_2.

b) Bestimmen Sie die ein- und die zweipunktige Gauss–Hermite–Formel.

(3 + 3 = 6 Punkte)

Aufgabe 2. Auf dem Referenzintervall $[0,1]$ mit Gewichtsfunktion $\rho : [0,1] \to (0,\infty)$ sei eine Quadraturformel Q gegeben durch

$$\int_0^1 f(x)\rho(x)\,dx \approx Q(f) := \sum_{k=1}^{m} \tau_k f(y_k) + \sum_{k=1}^{n} \sigma_k f(x_k),$$

wobei ein Teil der insgesamt $n+m$ Quadraturpunkte, nämlich alle y_k, $k = 1,\dots,m$, bereits fixiert ist. Die restlichen n Quadraturpunkte, d.h. $x_1, \dots, x_n$, sowie die Gewichte $\tau_1, \dots, \tau_m, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ können passend gewählt werden. Wir definieren die Polynome $r(x) = (x-y_1)(x-y_2)\cdots(x-y_m)$ sowie $s(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$.

a) Man zeige, dass Q *genau dann* exakt für alle Polynome $p \in \Pi_{m+2n-1}$ ist, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Q ist exakt für alle Polynome $q \in \Pi_{m+n-1}$

(ii) $\int_0^1 r(x)s(x)q(x)\rho(x)\,dx = 0$ für alle $q \in \Pi_{n-1}$.

b) Offensichtlich gehen durch die im Vergleich zur Gauss-Quadratur mit $n+m$ Punkten nicht optimale Wahl der m fixierten Quadraturpunkte m Exaktheitsgrade verloren. Worin liegt jedoch ein Vorteil der obigen Quadraturformel im Vergleich zur klassischen Gauss-Quadratur?

(4 + 1 = 5 Punkte)

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass es zur Annäherung des Integrals $I(f) = \int_0^1 f(x)\rho(x)dx$ mit Gewichtsfunktion $\rho : [0,1] \to (0,\infty)$ für **kein** $n \in \mathbb{N}$ eine numerische Quadraturformel

$$Q(f) := \sum_{k=1}^{n} \sigma_k f(x_k)$$

geben kann, die für alle Polynome $p \in \Pi_{2n}$ exakt ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie den folgenden Satz, der eine Verbindung zwischen dem Exaktheitsgrad einer einfachen Quadraturformel und der Konvergenzrate der zugehörigen summierten Quadraturformeln bei Erhöhung der Anzahl der Teilintervalle herstellt:

Theorem.

Sei $Q(f) := \sum_{k=1}^{n} \sigma_k f(x_k)$ eine Quadraturformel auf dem Referenzintervall $[0,1]$ mit Exaktheitsgrad $r \in \mathbb{N}$ und positiven Gewichten σ_k, $k = 1, ..., n$, zur Approximation des Integrals $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

Dann konvergiert die zu Q gehörige N-fach summierte Quadraturformel Q_N mit Ordnung $r+1$ gegen $I(f)$, d.h. für $(r+1)$-mal stetig differenzierbares $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gilt

$$|Q_N(f) - I(f)| \leq C \|f^{(r+1)}\|_{\mathcal{C}[0,1]} N^{-(r+1)}$$

mit einer Konstanten $C > 0$, die unabhängig von f ist.

Hinweise: $f^{(r+1)}$ bezeichnet die $(r+1)$-te Ableitung von f und $\|\cdot\|_{\mathcal{C}[0,1]}$ ist die Supremumsnorm auf dem Raum $\mathcal{C}[0,1]$ der stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

Machen Sie sich zunächst $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k = 1$ klar und zeigen Sie dann, dass

$$|I(f) - Q(f)| \leq 2 \min_{p \in \Pi_r} \|f - p\|_{\mathcal{C}[0,1]}$$

gilt. Ohne Beweis dürfen Sie verwenden, dass für $(r+1)$-mal stetig differenzierbares f gilt:

$$\min_{p \in \Pi_r} \|f - p\|_{\mathcal{C}[0,1]} \leq \frac{1}{2^{2r+1}(r+1)!} \|f^{(r+1)}\|_{\mathcal{C}[0,1]}.$$

b) Wie lässt sich der Quadraturfehler $|Q_N(f) - I(f)|$ durch die Anzahl der benötigten Funktionsauswertungen $K \in \mathbb{N}$ asymptotisch (d.h. für $K \to \infty$) abschätzen, wenn Q die Trapezregel bzw. die Simpsonregel bzw. die Gauss-Quadratur mit m Quadraturpunkten, $m \in \mathbb{N}$, ist?

Hinweis: Es ist nach einer Angabe der Form $\mathcal{O}(K^{-m})$ o.Ä. gefragt.

(4 + 3 = 7 Punkte)