Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 13.

Abgabe am **24. Januar vor der Vorlesung**.

Dies ist das letzte Übungsblatt. Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Auf den Übungsblättern 1 bis 13 konnten insgesamt 255 Punkte in den Theorieaufgaben erreicht werden. Somit sind *hinreichend* für die Klausurzulassung:
  - 128 Punkte in den Theorieaufgaben
  - 60 Punkte in den Programmieraufgaben
- *Organisatorische Hinweise zur Klausur bzw. zur Nachklausur werden zeitnah auf der Webseite der Vorlesung veröffentlicht. Besuchen Sie bitte unbedingt am Vorabend der Klausur nochmals diese Webseite, um ggf. aktualisierte Informationen zu erhalten.*

Aufgabe 1. Beweisen Sie den folgenden Satz:

Theorem (Quadraturfehler der Tensorprodukt-Quadratur)
Sei $[0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, der d-dimensionale Einheitswürfel und Q_i für $i = 1, \ldots, d$ jeweils eine Quadraturformel mit Quadraturpunkten $x_{k_i}^{(i)}$ und positiven Gewichten $\sigma_{k_i}^{(i)}$, $k_i = 1, \ldots, n_i$, zur Approximation des eindimensionalen Integrals über $[0,1]$. Den Quadraturfehler von Q_i bezeichnen wir jeweils mit

$$E_i(f) := \left| \int_0^1 f(x)dx - Q_i(f) \right|, \qquad f \in \mathcal{C}[0,1].$$

und nehmen darüberhinaus an, dass jedes Q_i mindestens Exaktheitsgrad 0 besitzt.
Dann genügt die Tensorprodukt-Quadraturformel $Q = Q_1 \otimes \ldots \otimes Q_d$, definiert durch

$$Q(f) := \sum_{k_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{k_d=1}^{n_d} \sigma_{k_1}^{(1)} \cdots \sigma_{k_d}^{(d)} f(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_d}^{(d)}), \qquad f \in \mathcal{C}([0,1]^d)$$

der Fehlerabschätzung

$$\left| \int_{[0,1]^d} f(x_1, \ldots, x_d) dx_1 \ldots dx_d - Q(f) \right| \\ \leq \sum_{i=1}^{d} \sup_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d \in [0,1]} E_i(f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, x_d)).$$

Hinweis: Für diese Aufgabe genügt es, die Behauptung für $d = 2$ zu zeigen. Der Fall $d \geq 2$ funktioniert analog, allerdings mit deutlich größerem Aufwand in der Notation.

Trennen Sie die beiden Quadraturfehler durch "Addition einer passenden Null".

(5 Punkte)

Aufgabe 2. Wir betrachten das Rechteck-Gebiet $W := [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ bzw. das Dreieck-Gebiet $D := \{(x,y) \in W : y \leq 1-x\}$. Im Folgenden sollen die Integrale

$$I_W(f) := \int_W f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{bzw.} \qquad I_D(f) := \int_D f(x,y)\,dx\,dy$$

numerisch angenähert werden.

a) Leiten Sie eine numerische Quadraturformel Q_W zur Approximation von $I_W(\cdot)$ her, die exakt ist auf $\left\{(x,y) \mapsto \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij} x^i y^j \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R}\right\}$.

Hinweis: Nutzen Sie den Satz aus Aufgabe 1.

b) Geben Sie durch geeignete Transformation von Q_W auch eine Quadraturformel Q_D zur Approximation von $I_D(\cdot)$ an. Welche Monom-Funktionen $(x,y) \mapsto x^j y^k$, $j,k \in \mathbb{N}_0$, werden von Q_D sicherlich exakt integriert?

(3 + 3 = 6 Punkte)

Aufgabe 3. Die Monte-Carlo Quadratur mit N Punkten liefert für ein mehrdimensionales Integrationsproblem mit Dimension d

$$I(f) = \int_{[0,1]^d} f(x)dx$$

die folgenden Resultate:

N	100	1000	10000	100000
Ergebnis der Monte-Carlo Quadratur	15,78543	15,71779	15,67618	15,68612

a) Wie hoch sollte N dementsprechend gewählt werden, wenn man das Integral auf 5 Stellen genau berechnen will?

Hinweis: Hier geht es um eine Schätzung unter Zuhilfenahme der zu erwartenden Fehlerordnung. Bestimmen Sie den unbekannten Parameter in der Abschätzung der Fehlerordnung, indem Sie das vermutlich genaueste Resultat als exakte Lösung behandeln...

b) Wie sollte N gewählt werden, damit die Monte-Carlo Quadratur mit Wahrscheinlichkeit höchstens 0.1% einen Fehler $\geq 10^{-3}$ liefert?

Hinweis: Chebychev-Ungleichung.

c) Angenommen, obige Ergebnisse wurden nicht durch ein Monte-Carlo-Verfahren sonden durch die d-fach tensorierte Trapezsumme mit Teilintervalllänge h erzeugt, die ebenfalls N Funktionsauswertungen benötigt. f sei dazu zweimal stetig differenzierbar und die Teilintervalllänge $h > 0$ für alle Koordinatenrichtungen gleich. Wie groß ist dann die Dimension d?

Hinweis: Nutzen Sie den Satz aus Aufgabe 1.

(3 + 3 + 3 = 9 Punkte)