



Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe



Übungsblatt 3. Abgabe am Dienstag, 30. Oktober vor der Vorlesung.

- Die Abgabe dieses (kürzeren) Übungsblattes erfolgt aufgrund des Feiertags schon dienstags. Für die Bearbeitung der Programmieraufgabe (siehe unten) besteht mehr Zeit.
- Die Abgabe der Übungsblätter soll in Gruppen von jeweils 3 Studierenden erfolgen.

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- a. Wie viele Multiplikationen bzw. wie viele Quadratwurzeln sind jeweils (maximal) notwendig, um A mit Hilfe von Householder-Transformationen bzw. mit Hilfe von Givens-Rotationen in eine obere Dreiecksmatrix zu überführen?
- b. Wie ändert sich die Situation, wenn A obere Hessenberg-Form hat, d.h. wenn alle Einträge von A unterhalb der ersten Nebendiagonalen verschwinden, also $a_{ij} = 0$ für $i > j + 1$ gilt?

(3+3 Punkte)

Aufgabe 2. Die Singulärwertzerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei gegeben durch $A = U\Sigma V^T$ mit orthogonalen Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie der Diagonalmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit den Singulärwerten $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ auf der Hauptdiagonalen.

- a. Zeigen Sie

$$\sigma_1 = \sup_{x, y \neq 0} \frac{y^T A x}{\|y\|_2 \|x\|_2}.$$

- b. Drücken Sie die Spektralnorm $\|A\|_2$ bzw. die Frobeniusnorm $\|A\|_F$ mit Hilfe der Singulärwerte aus. Folgern Sie die Äquivalenz der Normen inklusive Angabe der entsprechenden Konstanten.

Hinweis: Die Spektralnorm (Operatornorm bzgl. der euklidischen Norm) lässt sich berechnen als $\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^T A)$, wobei $\lambda_{\max}(A^T A)$ der größte Eigenwert von $A^T A$ ist.

Die Frobeniusnorm ist definiert durch $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$.

- c. Sei nun $m \geq n$ und A habe vollen Rang. Drücken Sie die relative Konditionszahl

$$\kappa(A) := \frac{\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2}{\min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2}$$

mit Hilfe der Singulärwerte aus.

(2 + 4 + 2 = 8 Punkte)

Programmieraufgabe 1. Bearbeiten Sie die im jupyter-notebook bereitgestellte Programmieraufgabe.

(25 Punkte)

Abgabe der Programmieraufgabe in der Woche vom 5. bis 9. November:

- Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in Gruppen von exakt 3 Studierenden
- Die Anmelde Listen für die Abgabezeiträume liegen in der Woche vor der Abgabe, d.h. in der Woche 29. Oktober bis 2. November, in den jeweiligen CIP-Pools aus.