Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 6.

Abgabe am **22. November vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. Wie in der Vorlesung bewiesen wurde eignet sich das CG-Verfahren zum Auffinden des globalen Minimierers der quadratischen Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2} x^T A x - b^T x,$$

wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit ist.
In dieser Aufgabe wollen wir das Verhalten des CG-Verfahrens untersuchen, wenn diese Bedingung an A verletzt ist. Wenden Sie dazu das CG-Verfahren für folgende A, b mit dem Startwert $x_0 = (0, 0)^T$ an:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Welches Verhalten könnten Sie jeweils beobachten? Interpretieren Sie dieses.

(6 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit mit $m \leq n$ verschiedenen Eigenwerten. Man zeige, dass das CG-Verfahren bei exakter Arithmetik nach spätestens m Schritten die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gefunden hat.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$. Die Krylov-Räume sind definiert als

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_k(A, b) &:= \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ b, Ab, \dots, A^{k-1} b \right\}, \qquad k = 1, \dots, n, \\ \mathcal{K}_0(A, b) &:= \{0\}. \end{aligned}$$

Sei nun $x^* := A^{-1} b$ und $k^* \in \mathbb{N}$, derart, dass $x^* \in \mathcal{K}_{k^*}(A, b)$. Zeigen Sie, dass x^* dann die Linearkombination von k^* Eigenvektoren von A ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Folgener Satz über das Konvergenzverhalten des GMRES-Algorithmus wurde in der Vorlesung erwähnt:

Satz. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar, d.h. es gilt $T^{-1}AT = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) =: \Lambda$ mit einer invertierbaren Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und den Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n \neq 0$.*
Dann gilt im GMRES-Verfahren für $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ für das k-te Residuum, $1 \leq k \leq k^*$, die Abschätzung

$$\|Ax_k - b\|_2 \leq \kappa_2(T) \cdot \inf_{p \in \mathcal{P}_k, p(0)=1} \max_{\ell=1,\dots n} |p(\lambda_\ell)| \cdot \|b\|_2,$$

wobei k^* den Stoppindex im Arnoldi-Prozess bezeichnet.

a) Beweisen Sie diesen Satz.

b) Folgern Sie eine Abschätzung für den relativen Fehler $\frac{\|x_k - x^*\|_2}{\|x^*\|_2}$, $x^* := A^{-1}b$.

(4+2= 6 Punkte)