Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 8.

Abgabe am **6. Dezember vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Eigenwerte $\lambda_{i,\epsilon}$ und die Eigenvektoren $v_{i,\epsilon}$ $(i = 1, 2)$ der Matrix

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \cos \frac{1}{\epsilon} & -\epsilon \sin \frac{1}{\epsilon} \\ -\epsilon \sin \frac{1}{\epsilon} & 1 - \epsilon \cos \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Wie verhalten sich A_ϵ, $\lambda_{i,\epsilon}$ und $v_{i,\epsilon}$ für $\epsilon \to 0$?

(5 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm des $\mathbb{R}^{n\times n}$. ($\|\cdot\|$ muss nicht notwendigerweise eine Operatornorm sein.) Zeigen Sie, dass für jede diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(A).$$

Hierbei bezeichnet $\rho(A)$ den Spektralradius von A, d.h. $\rho(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. Es sei $p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x + x^n$ ein normiertes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Die Frobenius-Begleitmatrix von p ist dann definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

a) Zeigen Sie, dass p das charakteristische Polynom von A ist.

b) Betrachten Sie die Frobenius-Begleitmatrizen für die Polynome $q(x) = (x-1)^n$ und $q_\epsilon(x) = p(x) + \epsilon$ mit $\epsilon > 0$.

Interpretieren Sie dies im Bezug auf die (relative) Kondition der Eigenwerte in Abhängigkeit von der Matrix.

c) Sei nun λ_1 eine einfache (reelle) Nullstelle von p mit maximalem Betrag. Für Startwerte $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei die Folge $(x_m)_m \subset \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch

$$x_{m+n} = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{m+k}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Man zeige, dass

$$\frac{x_{m+1}}{x_m} = \lambda_1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m\right) \qquad \text{für } m \to \infty$$

gilt, sofern $x_0, \ldots, x_{n-1}$ passend (Wie?) gewählt sind. Hierbei bezeichnet λ_2 eine nach λ_1 betragsmäßig größte Nullstelle von p.

Die Diagonalisierbarkeit der Frobenius-Begleitmatrix A darf vorausgesetzt werden.

Hinweis: Vektoriteration von A^T

(3+2+5 Punkte)