

Programmieraufgabe II (6+6+12+6 = 30 Punkte)

```
In [1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Teilaufgabe a: Gradientenverfahren mit Armijo-Schrittweite (6 Punkte)

Implementieren Sie das Gradientenverfahren mit Armijo-Linesearch:

Als Input sollen übergeben werden:

- eine Funktion f sowie eine weitere Funktion $gradf$, die den Gradienten von f berechnet,
- ein Startwert x_0 ,
- eine Toleranz $tol > 0$ sowie die maximale Anzahl $itmax$ an Gradientenschritten,
- die zwei Parameter β, c für die Schrittweitenbestimmung nach Armijo sowie die maximale Anzahl $armijoitmax$ der dafür ausgeführten Iterationen.

Output soll eine Iterierte x_{k^*} sein, die $\|\nabla f(x_{k^*})\| < \epsilon$ erfüllt. Zusätzlich sollen Listen mit den Funktionswerten $(f(x_k))_k$ ("*fvals*") bzw. den Iterierten $(x_k)_k$ ("*xvals*") ausgegeben werden.

Im Falle des Versagens des Algorithmus bzw. von Teilen des Algorithmus sollen entsprechende Fehlermeldungen ausgegeben werden.

```
In [4]: def gradientdescent_armijo(f, gradf, x0, tol, c, beta, itmax, armijoitmax):
        ## to be filled in ##
        return x, xvals, fvals
```

Testen Sie Ihre Implementierung an folgenden Beispielen (mit x^* sind jeweils die bekannten Minima angegeben):

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2, x^* = (1, 1)$.
- $g : \mathbb{R}^{100} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, mit $b = Ax^*, x^* = (1, 1, \dots, 1)^T$. A ist die 100×100 -Matrix mit 4en auf der Hauptdiagonale, -1 auf den beiden Nebendiagonalen und sonst Nulleinträgen.
- $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-1/x^2), x^* = 0$.

Plotten Sie dazu sowohl die Verläufe von $f(x_k) - f(x^*)$ als auch von $\|x_k - x^*\|_2$ (analog für g, h) für den Startwerten $x_0 = 0$ (f und g) bzw. $x_0 = 1$ (für h).

```
In [ ]:
```

Teilaufgabe b: Gradientenverfahren mit konstanter Schrittweite (6 Punkte)

Implementieren Sie analog zu Teilaufgabe a) den Gradientenabstieg mit konstanter Schrittweite α .

```
In [3]: def gradientdescent_const(f, gradf, x0, tol, alpha, itmax):
        ## to be filled in ##
        return x, xvals, fvals
```

Vergleichen Sie das Konvergenzverhalten des Gradientenverfahrens mit konstanter Schrittweite mit Ihren Ergebnissen aus Teilaufgabe a). Verwenden Sie dazu dieselben drei Funktionen f , g und h , die gleichen Startwerte und testen Sie Schrittweiten $\alpha \in \{0.5, 0.3, 0.1, 0.01, 0.005, 0.003, 0.002\}$ Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

```
In [ ]: 
```

Teilaufgabe c: Gradientenverfahren vs. CG-Verfahren (12 Punkte)

Implementieren Sie für eine positiv definite Matrix A , eine rechte Seite b und einen Startwert x_0 den Gradientenabstieg mit exakter Schrittweite für die Lösung der linearen Gleichung $Ax = b$. Neben A und b sollen als Input eine Toleranz tol für die Norm des Gradienten sowie eine maximale Anzahl $itmax$ von Gradientenschritten vorgegeben werden.

Implementieren Sie analog dazu das CG-Verfahren für $Ax = b$ und vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit des Gradientenverfahrens mit der des CG-Verfahrens anhand von A , b aus Teilaufgabe a): Erstellen Sie dazu eine Graphik, in der Sie die Konvergenzgeschwindigkeit aller vier Verfahren (Gradientenabstieg mit Armijo-Schrittweite, konstanter Schrittweite, optimaler Schrittweite und CG) gegenüberstellen.

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis. Gehen Sie dabei auf die Konvergenzordnung des Gradientenverfahrens mit optimaler Schrittweite bzw. des CG-Verfahrens ein.

```
In [8]: def gradientdescent_quadratic(A,b,x0,tol,itmax):
        ## to be filled in ##
        return x, xvals

def mycg(A, b, x0, itmax,tol ):
        ## to be filled in ##
        return x,xvals
```

```
In [6]: ## Vergleich der 4 Verfahren: ##
```

Sei nun $C = \begin{pmatrix} c & -1 \\ -1 & c \end{pmatrix}$ mit $c > 1$ and $d = (0, 0)^T$. Lassen Sie die Iterierten des Gradientenverfahrens mit optimaler Schrittweite bzw. des CG-Verfahrens (für die lineare Gleichung $Cx = d$) in einen Höhenlinienplot der Funktion $\phi(x) = \frac{1}{2}x^T Cx - d^T x$ einzeichnen. Startwert soll für beide Verfahren $x_0 = (c, 1)^T$ sein.

Variieren Sie c und interpretieren Sie Ihr Ergebnis. Achten Sie dabei darauf, dass der Plot einen sinnvollen Ausschnitt der "Höhenlandschaft" von f zeigt, sodass das Verhalten der Iteration erkennbar wird.

```
In [ ]: 
```

Teilaufgabe d: Gauss-Newton Verfahren (6 Punkte)

Implementieren Sie das Gauss-Newton-Verfahren von Übungsblatt 4, Aufgabe 2. Für die Lösung der entsprechenden Least-Squares Probleme können Sie die unten angegebene Funktion *myleastquares* verwenden.

Input der Funktion *gaussnewton* soll sein:

- Funktion *f* sowie eine Funktion *df*, die die Jacobi-Matrix von *f* auswertet
- Vektor *y*
- Startwert x_0 und Toleranz *tol*, derart, dass die Iteration abbricht, wenn $\|\nabla r(x)\| < tol$ erfüllt ist oder eine Maximalzahl *itmax* von Iterationen erreicht ist

```
In [17]: def myleastquares(A,b):
          Q,R = np.linalg.qr(A)
          rhs = (np.transpose(Q)).dot(b)
          xmin = np.linalg.solve(R,rhs)
          return xmin

          def gaussnewton(f,df,y,x0,tol,itmax):

              ## to be filled in ##

              return x, xvls
```

Testen Sie Ihre Implementierung anhand des Beispiels aus Aufgabe 2c von Übungsblatt 4. Erstellen Sie einen Plot, aus dem hervorgeht, welche Konvergenzordnung beobachtet werden kann.

In []: