Programmieraufgabe V (8 + 8 + 8 = 24 Punkte)

Abgabe in der Woche 14.-18. Januar

In [36]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Teilaufgabe a)

Implementieren Sie die N*-fach summierte Newton-Cotes-Quadratur* vom Grad $m = 1$ und $m = 3$ bzw. die N-fach summierte *Gauss-Legendre-Quadratur* für $m = 2$ bzw. $m = 4$ (siehe Vorlesung) auf einem Interval $[a, b]$.

Input sollen jeweils die zu integrierende Funktion f, die Intervallgrenzen a, b und die Anzahl der Teilintervalle N sein.

In [37]:
```
```

Testen Sie Ihre Implementierung an den Funktionen $f(x) = \chi_{x>1/2} \cdot \sin(\pi x)$, $g(x) = x^n$, (mit $n \in \{7, 8\}$) und $h(x) = \exp(x)$. Der Integrationsbereich soll jeweils das Intervall $[0, 1]$ sein. Mit $\chi_{x>1/2}$ bezeichnen wir die charakteristische Funktion der Menge $\{x \in \mathbb{R} : x > 1/2\}$.

Plotten Sie jeweils den Fehler der Quadratur in Abhängigkeit von der Anzahl der Subintervalle N bzw. in Abhängigkeit von der Zahl der benötigten Funktionsauswertungen. Interpretieren Sie Ihre Beobachtungen.

In [43]:
```
```

In [ ]:
```
```

Teilaufgabe b)

Implementieren Sie die d*-fach tensorierte* N*-fach summierte Trapezregel* für die numerische Integration einer Funktion auf $[0, 1]^d$ für $d = 1, 2, 3$. Input soll die zu integrierende Funktion f, die Dimension d sowie die Anzahl der Teilintervalle N sein.

In [ ]:
```
```

Testen Sie Ihre Implementierung mit Hilfe der Funktion $k(x_1, \ldots, x_d) = (\pi/2)^d \prod_{i=1}^{d} \sin(\pi x_i)$ für $d = 1, 2, 3$. Plotten Sie jeweils den Fehler der Quadratur in Abhängigkeit von der Zahl der benötigten Funktionsauswertungen. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

In [ ]:
```
```

Teilaufgabe c)

Implementieren Sie die Monte-Carlo Quadratur auf dem Integrationsbereich $[0, 1]^d$. Input soll die zu integrierende Funktion f, die Dimension d und die Anzahl der Samples N sein.

In [ ]:

Testen Sie Ihre Implementierung an der Beispielfunktion aus Teilaufgabe b) für $d = 1, 2, 3$. Plotten Sie erneut den Fehler der Quadratur gegen die Anzahl der Funktionsauswertungen. (Beachten Sie: Beim Quadraturfehler der Monte-Carlo Quadratur handelt es sich um eine Zufallsvariable: Verwenden Sie daher für diesen Plot jeweils den Mittelwert des (positiven!) Fehlers aus 20 Monte-Carlo Quadraturen mit n Funktionsauswertungen, um den zu erwartenden Quadraturfehler der Monte-Carlo Quadratur mit n Auswertungen zu bestimmen.)

Eine mögliche Wahl wäre z.B. Monte-Carlo Quadratur mit $n = 100, 200, 300, \ldots, 5000$Funktionsauswertungen.

Interpretieren Sie Ihre Beobachtung, insbesondere im Vergleich zu den Ergebnissen aus b).

In [ ]:

In [ ]: