Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 19/20
Prof. Dr. J. Gedicke
Johannes Rentrop und Jannik Schürg

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 12.

Abgabedatum: **keine Abgabe**

Aufgabe 1. (Matrix-Normen)

Sei $|||\cdot|||$ eine induzierte Matrix-Norm.

a) Zeigen Sie, dass $|||AB||| \leq |||A||| |||B|||$ (Submultiplikativität).

b) Zeigen Sie, dass $|||A|||^{-1} \leq |||A^{-1}|||$.

c) Sei A eine Matrix mit $|||A||| = |||A^{-1}||| = 1$. Zeigen Sie, dass dann $\|Ax\| = \|x\|$ für alle Vektoren x.

d) Zeigen Sie, dass die Matrix-Norm $\|\cdot\|_F \colon A \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}[AA^\top]}$ verträglich mit der euklidischen Norm ist.

Aufgabe 2. (Kondition)

Berechnen Sie die Kondition der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Spaltensummen- und der Zeilensummennorm.

Aufgabe 3. (Spektral-Norm)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Kondition von A und B bzgl. der Spektral-Norm.

Aufgabe 4. (Matrixnormen und Kondition)

Wir betrachten eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ im $\mathbb{R}^n$ und die zugehörige induzierte Matrixnorm. Sei A eine reguläre Matrix und $\tilde{A} = A + \Delta A$ so gewählt, dass

$$\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1.$$

a) Zeigen Sie, dass dann $\tilde{A}$ invertierbar ist.

Hinweis: Man nutze, dass eine Matrix B injektiv ist, falls es ein $c > 0$ gibt, sodass $\|Bx\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Warum ist das so?

b) Wir betrachten jetzt das Gleichungssystem $Ax = b$. Das zugehörige Gleichungssystem mit gestörter Matrix $\tilde{A}$ lautet $\tilde{A}\tilde{x} = b$, wobei $\tilde{x} = x + \Delta x$. Zeigen Sie, dass dann die Formel

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \cdot \frac{\kappa(A)}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|}$$

gilt, wobei $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ die Konditionszahl bzgl. der hier betrachteten Norm ist.