Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 19/20
Prof. Dr. J. Gedicke
Johannes Rentrop und Jannik Schürg

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 2.

Abgabedatum: **28.10.2019**

Aufgabe 1. (Festkommadarstellung)

Die Festkommadarstellung einer Zahl $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zur Basis $b \geq 2$ ist gegeben durch Ziffern $\{z_i | z_i \in \mathbb{N}, 0 \leq z_i \leq b-1, i \in \mathbb{Z}\}$, sodass

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} z_i \, b^i = (\ldots z_1 z_0 . z_{-1} z_{-2} \ldots)_b \ .$$

a) Zeigen Sie, dass gilt

$$(0.\overline{(b-1)})_b := (0.(b-1)(b-1)\ldots)_b = 1 \ .$$

b) Zeigen sie, dass die Zahl $1/10$ keine endliche Festkommadarstellung zur Basis $b = 2$ besitzt.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2. (Maschinenzahlen in Gleitkommadarstellung)

Gegeben sei ein Zwei-Byte-Rechner (1 Byte = 8 Bit) mit Gleitkomma-Arithmetik und interner Zahldarstellung

$$|s|m_1 m_2 m_3 \ldots m_9|e_1 e_2 e_3 \ldots e_6| \ ,$$

mit einem Vorzeichen-Bit s, 9 Bits m_i für die Mantisse, sowie 6 Bits e_j für den Exponenten (in dieser Reihenfolge).

Die Zahldarstellung ist *normalisiert* und arbeitet mit einem *hidden bit*, d.h. die 1 vor dem Komma wird nicht gespeichert. Der Exponent soll im Bereich $-31 \leq e \leq 31$ darstellbar sein, der gespeicherte Exponent ist stets positiv und wird dafür mit einem Bias von 32 versehen.

Die Rechner-Bits repräsentieren also die Zahl

$$z = (-1)^s \cdot (1.m_1 m_2 \ldots m_9)_2 \cdot 2^{\tilde{e}-32} \quad \text{mit} \quad \tilde{e} = \sum_{j=1}^{6} e_j \cdot 2^{6-j} \ .$$

Für die Zahl 0 wird das Bitmuster $|0|0\ldots0|0\ldots0|$ verwendet, außerdem wird noch die Exponentenbitfolge 000000 zur Kennzeichnung von Sonderfällen verwendet – sie steht also nicht für die Zahldarstellung zur Verfügung.

a) Welche Darstellung haben die Zahlen 13, 42.125 und 1/10? Für den Fall, dass eine Zahl nicht exakt darstellbar ist, werden die überzähligen Stellen einfach abgeschnitten. Ermitteln Sie außerdem die zu der Bitfolge

$$|1|011010111|001101|$$

gehörige Dezimalzahl.

b) Wie viele Zahlen können in diesem Gleitkomma-Format dargestellt werden? Die Bitkombinationen für Sonderfälle seien zu vernachlässigen.

c) Geben Sie die größte darstellbare Zahl $z_{\max}$ und die betragsmäßig kleinste Zahl $\bar{z} > 0$ an. Geben Sie jeweils auch die zugehörigen Bitfolgen an.

d) Definieren Sie den Begriff „Maschinengenauigkeit" und geben Sie die Maschinengenauigkeit des Rechners an.

(2+1+1+2 Punkte)

Aufgabe 3. (Landau-Symbole)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für alle Funktionen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $f = \mathcal{O}(g)$ genau dann wenn $g = \Omega(f)$.

b) Für alle Funktionen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $f = \mathcal{O}(g)$ oder $f = \Omega(g)$.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4. (Landau-Symbole 2)

Beweisen Sie:

a) $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.

b) $\big(\log(n)\big)^k = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{\ell}})$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\sum_{i=1}^{n} \log(i) \geq \int_1^n \log x \, \mathrm{d}x$, und $\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^k}{x} = 0$.

(3+3 Punkte)

Hinweis: Der Help Desk für die Algorithmische Mathematik I findet an folgenden Terminen statt:

- Di/Do 10-13, Raum N1.002
- Mo 12-14, Mi 14-16, jeweils Raum N0.007 und Do 14-16, Raum N.008 (Lehramt)