Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 19/20
Prof. Dr. J. Gedicke
Johannes Rentrop und Jannik Schürg

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 3.

Abgabedatum: **04.10.2019**

Aufgabe 1. (Rundung)

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Ausdrücke mathematisch äquivalent sind:

- $((a+b)(a-b))^2$
- $(a^2+b^2)^2 - 4(ab)^2$
- $(a^2-b^2)^2$

b) Seien nun $a = 10^6 + 1$ und $b = 10^6 - 2$. Multiplizieren Sie damit obige Ausdrücke aus. *Jedes* Zwischenergebnis, das nicht mit 10 gültigen Stellen dargestellt werden kann, soll auf 10 Stellen (kaufmännisch) gerundet werden.

c) Berechnen Sie jeweils den relativen Fehler der Resultate (2 gültige Ziffern genügen). Was ist der Grund für dieses Verhalten.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2. (Quersumme)

Sei $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Abbildung, welche eine natürliche Zahl auf ihre Quersumme abbildet: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $n = \sum_{i=0}^{l} z_i 10^i$ die Dezimaldarstellung, dann gilt $q(n) = \sum_{i=0}^{l} z_i$. Definiere rekursiv die Funktionenfolge $q_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $q_0(n) := q(n)$, $q_{i+1}(n) := q(q_i(n))$. Sei $q^*(n) := \lim_{i\to\infty} q_i(n)$.

a) Zeigen Sie, dass q^* wohldefiniert ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$q^*(n) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 0, \\ 9 & \text{wenn } n \bmod 9 = 0, \\ n \bmod 9 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Sie dürfen folgende Rechenregeln für mod benutzen:

$$\begin{aligned} ab \bmod m &= \big((a \bmod m)(b \bmod m)\big) \bmod m, \\ a + b \bmod m &= \big((a \bmod m) + (b \bmod m)\big) \bmod m. \end{aligned}$$

c) Folgern sie $q^*(ab) = q^*(q^*(a)q^*(b))$.

d) Für alle i und n gilt: 9 ist Teiler von n gdw. 9 Teiler von $q_i(n)$ ist.

e) Gelten a), b), c), d) auch für andere Basen?

(1 + 3 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Aufgabe 3. (Symmetrische ternäre Darstellung)

Sei $l \in \mathbb{N}$ und $z_i \in \{-1, 0, 1\}$ für $i = 0, \dots, l$ mit $z_l \neq 0$. Dann heißt

$$\sum_{i=0}^{l} z_i 3^i =: n \in \mathbb{Z}$$

symmetrische ternäre Darstellung von n. Wir notieren -1 als $\overline{1}$ und schreiben bspw.

$$(1\overline{1}01)_{\overline{3}} = 1 \cdot 3^3 + (-1) \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 19.$$

a) Gegeben sei eine Zahl in symmetrischer ternärer Darstellung, $n = \sum_{i=0}^{l} z_i 3^i$. Wie kann das Vorzeichen einfach erkannt werden? Wie kann die Darstellung von $-n$ berechnet werden?

b) Zeigen Sie, dass eine symmetrische ternäre Darstellung für alle n existiert.

   Hinweis: Benutzen Sie die (gewöhnliche) Darstellung zur Basis 3, aber nicht direkt von n selbst.

c) Stromausfall in der Mensa! Die Waagen der Salatausgabe funktionieren nicht mehr, in Konsequenz ist der reibungslose Ablauf gefährdet. Eine schnelle Abhilfe muss her.

   Zum Glück hat man die alte Balkenwaage aus den Anfangszeiten immer für solche Fälle aufgehoben. Per Same-Day-Delivery sollen nun noch neue, geeichte Gewichte bestellt werden. Aufgrund von Vorgaben aus der Verwaltung müssen so wenig Gewichte wie möglich gekauft werden.

   Die Studierenden kaufen Salat immer in den Portionsgrößen 1kg, 2kg, . . . , 40kg. Was ist die minimale Anzahl an Gewichten und deren Gewicht, die benötigt werden, um all diese Portionsgrößen messen zu können, wenn dabei die Gewichte *auf beide Seiten* der Waage gestellt werden können? Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Wahl der Gewichte?

   Beispiel: Ich möchte 6kg Salat abwiegen, dazu kann ich ein 3kg Gewicht zu dem Salat und ein 9kg Gewicht auf die andere Seite stellen.

   Schicken Sie Ihre Lösung auch an `gastronomie@studierendenwerk-bonn.de`**.**

(1+2+4 Punkte)