Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 19/20
Prof. Dr. J. Gedicke
Johannes Rentrop und Jannik Schürg

Übungsblatt 4.

Abgabedatum: **11.11.2019**

Aufgabe 1. (Stabilität, Kondition)

Schreiben Sie folgende Ausdrücke so um, dass Auslöschung bei der Subtraktion betragsmäßig ähnlicher Zahlen vermieden wird. Für Argumente in welchem Bereich tritt dies jeweils auf? Berechnen Sie außerdem die absoluten und relativen Konditionszahlen und geben Sie an, wo die Funktionsauswertung qualitativ gut bzw. schlecht konditioniert ist. Machen Sie sich so noch einmal den Unterschied zwischen Stabilität und Kondition klar.

a) $f_1(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}, \quad |x| < \pi$

b) $f_2(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1, \quad x \neq -1$

c) $f_3(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$

Hinweis: Durch geschickte Erweiterung können Differenzen wegfallen. Nutzen Sie außerdem die Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Zur Berechnung der Konditionszahlen dürfen Sie vorraussetzen, dass die Funktionen differenzierbar sind. Verwenden Sie die bekannten Ableitungsregeln.

(3+3+3 Punkte)

Aufgabe 2. (Instabilität)

In dieser Aufgabe sehen wir ein Beispiel für ein Berechnungsproblem, das instabil ist und bei einer unbedarften Implementierung mit Fließkomma-Arithmetik zu katastrophalen Fehlern führt, siehe Programmieraufgabenblatt 4, Aufgabe 2.
Sei $c \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Folge a_n rekursiv durch

$$a_0 := c - 1, \quad a_n := n a_{n-1} - 1. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass gilt $a_n = c\,n! - \int_1^\infty x^n e^{1-x}\,\mathrm{d}x$.

b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{wenn } c < e, \\ 0 & \text{wenn } c = e, \\ \infty & \text{wenn } c > e. \end{cases}$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Instabilität: Betrachtet man den Fall $c = e$ so führt eine kleine Änderung von c zu einer großen Änderung von $\lim_{n\to\infty} a_n$. Die Abbildung $c \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$ ist also instabil um $c = e$ (sie ist auch unstetig).

(3+2 Punkte)

Aufgabe 3. (Maschinenzahlen)

In dieser Aufgabe werden Lücken zwischen Maschinenzahlen untersucht. Sei $F = F(b, t, e_{\min}, e_{\max})$ ein Maschinenzahlbereich mit b prim.

a) Seien $x, y \in F$ zwei Maschinenzahlen mit $y \neq 0$. Dann hat die normalisierte Gleitkommadarstellung von $q := x/y$ zur Basis b entweder unendlich viele Stellen oder höchstens t.

b) Folgern Sie für $b = 2$, dass es keinen Quotient zweier Zahlen $x, y \in F$ gibt, so dass x/y genau zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maschinenzahlen in F liegt.

c) Zeigen Sie für $b = 2$, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle aufeinanderfolgenden $u, v \in F$ und alle $x, y \in F$ mit $y \neq 0$ gilt

$$\left|\frac{u+v}{2} - \frac{x}{y}\right| \geq \varepsilon.$$

Es gibt also eine "tote Zone" um die Mittelpunkte zweier aufeinanderfolgender Zahlen.

(4+1+1 Punkte)