Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 19/20
Prof. Dr. J. Gedicke
Johannes Rentrop und Jannik Schürg

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 7.

Abgabedatum: **02.12.2019**

Aufgabe 1. (Haus vom Nikolaus)

Wir betrachten das “Haus vom Nikolaus”. Sie kennen sicher die Frage, ob und wie man dieses in einem Zug zeichnen kann, ohne eine Kante zweimal zu durchlaufen.

a) Geben Sie einen solchen gültigen Kantenzug an. Kann man von jedem Knoten $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ aus starten? *Hinweis*: Betrachten Sie die Knotengrade.

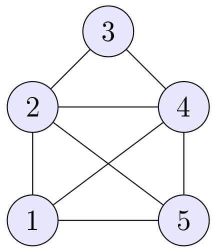

Figure 1: Das Haus vom Nikolaus

b) Wenden Sie die in Aufgabe a) gewonnenen Erkenntnisse an und entscheiden Sie für folgenden Graphen, ob sich dieser auch in “einem Zug” zeichnen lässt. Falls ja, geben Sie einen solchen an. Was ist der Unterschied zu dem Graphen aus a).

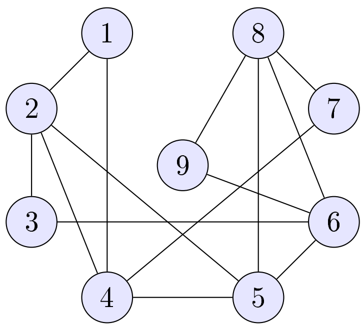

Figure 2: Nikolaus’ Heimweg?

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $G = (V, E, \psi)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph mit mindestens zwei Knoten. G heißt *eulerscher Graph*, falls es einen geschlossenen Kantenzug gibt, der alle Kanten genau einmal enthält. Einen solchen Kantenzug bezeichen wir als *Euler-Tour*.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

  i) Alle Knoten haben geraden Grad.

ii) Es gibt paarweise kantendisjunkte Kreise $C_1, \dots, C_n$ mit

$$E(G) = E(C_1) \cup \dots \cup E(C_n). \tag{1}$$

iii) Jeder geschlossene Kantenzug maximaler Länge, der jede Kante höchstens einmal enthält, enthält bereits alle Kanten.

iv) G ist eulerscher Graph.

b) Angenommen G habe genau $2k$ Knoten mit ungeradem Grad. Zeigen Sie, dass dann eine Partition von G in k kantendisjunkte aber jeweils zusammenhängende Subgraphen existiert.

(4 + 3 Punkte)

Aufgabe 3. (Lineare Algebra und Graphentheorie)

Es gibt einige interessante Überschneidungen zwischen Linearer Algebra und Graphentheorie. In dieser Aufgabe lernen wir ein einfaches Beispiel kennen. Sei dafür $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Bezeichne mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Adjazenzmatrix von G, also die Matrix mit den Einträgen

$$A_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \neq j \text{ und } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und mit $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix definiert durch

$$L_{ij} := \begin{cases} |\delta(v_i)| & \text{falls } i = j, \\ -A_{ij} & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass die Anzahl an v_i-v_j-Kantenzügen der Länge k genau $\left(A^k\right)_{ij}$ ist.

b) Sei $K := A^1 + A^2 + \dots + A^{n-1}$. Welche Aussage können Sie über die Einträge K_{ij} und den Zusammenhang von G zeigen?

c) Was müssen Sie für a) und b) ändern, damit die Aussagen auch für Graphen gelten, die nicht einfach sind?

d) Zeigen Sie, dass die Anzahl von Zusammenhangskomponenten von G genau der Dimension von $\ker L$ entspricht.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $x^\top L x = \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} (x_i - x_j)^2$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

(3+1+1+4 Punkte)