Übungsblatt 7.

Abgabe: 03.12.2019 vor der Vorlesung

Aufgabe 17. (Dreiecksmatrizen)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie, dass auch A^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 18. (Vorkonditionierung)

Das numerische Lösen von linearen Gleichungssystemen $Ax = b$ wird stark beeinflusst durch die Konditionszahl der Matrix A,

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|.$$

Die Konvergenzgeschwindigkeit fast aller numerischen Verfahren wird negativ beeinflusst, falls $\kappa(A) \gg 1$.
Ein Gleichungssystem $Ax = b$ ist gut-konditioniert, falls $\kappa(A) \approx 1$ gilt. Man würde daher also gerne das System umformen zu $Bx = c$ mit einer gut-konditionierten Matrix B. Man kann dafür $B = CA$ und $c = Cb$ setzen - die reguläre Matrix C, die im Optimalfall nahe bei A^{-1} ist, nennt man **Vorkonditionierer**. Das System $CAx = Cb$ nennt man **links vorkonditioniertes System**.
Analog kann man auch das **rechts vorkonditionierte System** $ACy = b$ und anschließend $x = C^{-1}y$ lösen.

In dieser Aufgabe untersuchen wir einige Techniken zur Vorkonditionierung. A ist im Folgenden eine reguläre Matrix.

a) Finden Sie eine obere Dreiecksmatrix C sodass das System $ACy = b$ gut konditioniert ist.

b) Eine einfache Möglichkeit zur Vorkonditionierung ist die so genannte Zeilenäquilibrierung von A, d.h. Multiplikation von links mit der Diagonalmatrix

$$D = \begin{bmatrix} \left(\sum_{j=1}^n |a_{1,j}|\right)^{-1} & & & \\ & \left(\sum_{j=1}^n |a_{2,j}|\right)^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left(\sum_{j=1}^n |a_{n,j}|\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zeilenäquilibriert und regulär. Zeigen Sie, dass für jede reguläre Diagonalmatrix $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und die Zeilensummennorm

$$\|\cdot\|_\infty := \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\cdot_{i,j}|$$

gilt, dass

$$\kappa_\infty(A) \leq \kappa_\infty(\tilde{D}A).$$

Jede andere Zeilenskalierung verschlechtert also die Konditionszahl.

(3 Punkte)

Aufgabe 19. (GMRES)

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Zeigen Sie, dass das GMRES-Verfahren mit $x_0 = 0$ in den ersten $n-1$ Iterationen die Vektoren $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$ liefert. Zeigen Sie außerdem, dass die n-te Iterierte x_n genau die Lösung $x^\star$ des Gleichungssystems $Ax = b$ ist, wobei

$$x^\star = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 20. (Eigenpaare von tridiagonalen Bandmatrizen)

Wir betrachten die tridiagonale Bandmatrix

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \beta\gamma > 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lambda_k = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma}\,\mathrm{sgn}(\beta)\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad 1 \leq k \leq n$$

die Eigenwerte von B mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$v_k = [v_k]_{l=1}^n = \left[\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{l-1}{2}} \sin\left(\frac{kl\pi}{n+1}\right)\right]_{l=1}^n$$

sind.

(5 Punkte)