Einführung in die Grundlagen der Numerik

Winter semester 2019/2020
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Denis Düsseldorf

universitätbonn

Übungsblatt 10.

Abgabe : 07.01.2019 vor der Vorlesung

Das Blatt dient zur Bearbeitung in der Woche vor den Weihnachtsferien. Da am 24. selbstverständlich keine Vorlesung ist, erfolgt die Abgabe am 07.01.2020. Es wird über die Ferien ein weiteres Blatt zur Vertiefung / Wiederholung geben.

Frohe Weihnachten :-)

Aufgabe 27. (Rang-k-Matrizen)

a) Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von der Form

$$A = aa^T$$

für einen Vektor $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ symmetrisch ist und Rang 1 hat. Bestimmen Sie außerdem alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Konstruieren Sie ausgehend von Ihren Beobachtungen aus a) eine Matrix vom Rang 2 mit zwei verschiedenen Nichtnull-Eigenwerten.

Um numerische Verfahren zu testen, wendet man Sie auf Instanzen an zu denen man die Lösung der Problemstellung kennt. Um also bspw. einen selbstimplementierten Eigenwertlöser zu testen, benötigt man Matrizen mit bekannten Eigenwerten (-vektoren). Die Methodik aus dieser Aufgabe erlaubt es, normale Testmatrizen A mit beliebigen Eigenpaaren und von beliebiger Größe und Rang einfach zu konstruieren. Falls A normal ist und vollen Rang hat, kann man wegen

$$\kappa_2(A) = \left|\frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}\right|,$$

auf diese Weise Matrizen mit beliebiger Konditionszahl konstruieren, die zum Testen von Lösern verwendet werden können.

(4 Punkte)

Aufgabe 28. (Richardson Verfahren zur Eigenwertberechnung)

Zur Erinnerung: Das relaxierte Richardson-Verfahren ist ein Splitting-Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen der Form $Ax = b$. Die Berechnungsvorschrift lautet

$$x_{k+1} = (I - \omega A)x_k + \omega b.$$

Sie zeigen in den folgenden Teilaufgaben, dass das Richardson-Verfahren unter schwachen Voraussetzungen dazu genutzt werden kann um Eigenvektoren von selbstadjungierten, normalen Matrizen zu berechnen.

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ im Folgenden eine eine normale und selbstadjungierte Matrix, d.h. $AA^H = A^H A$ und $A^H = A$.

a) Schreiben Sie das relaxierte Richardson-Verfahren so um, dass es das Eigenwertproblem $Ax = \lambda x$ löst. Nehmen Sie an, dass eine Näherung μ an den Eigenwert λ zur Verfügung steht.

b) Zeigen Sie, dass A unitär diagonalisierbar ist, d.h. $A = Q^H D Q$ für unitäres $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und Diagonalmatrix D.
Tipp: Die Schur-Zerlegung der Matrix A existiert, d.h. $R = Q^H A Q$ mit unitärem Q und oberer Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Nutzen Sie vollständige Induktion um zu zeigen, dass R eine Diagonalmatrix sein muss.

c) Führen Sie - wie für die Analyse des Richardson Verfahrens üblich - neue Größen $\hat{x}_k = Q^H x_k$ ein, d.h. Schreiben Sie das Verfahren aus a) in den neuen Größen auf. Leiten Sie anschließend die folgende komponentenweise Darstellung des Verfahrens her:

$$(\hat{x}_k)_i = \Big[1 - \omega(\lambda_i - \mu)\Big]^k (\hat{x}_0)_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

d) Die Eigenwerte seien geordnet, $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$, und es gelte $\mu < \lambda_n$ und $\omega < \frac{2}{\lambda_n - \mu}$. Folgern Sie aus der Darstellung aus c), dass alle Komponenten i zu den größeren Eigenwerten $\lambda_i > \mu$ gegen Null konvergieren und das die Richardson-Iteration einen Vektor aus dem invarianten Eigenraum zu den kleineren Eigenwerten $\lambda_i < \mu$ berechnet.

e) Zeigen Sie, wie die Bedingung $\mu < \lambda_n$ aus d) mit dem Rayleigh-Quotienten zu erfüllen ist, d.h. finden Sie eine einfache Möglichkeit um solch ein μ mit dem Rayleigh-Quotienten zu berechnen. Wie kann man ausgehend hiervon ebenfalls die zweite Bedingung aus d), d.h. $\omega < \frac{2}{\lambda_n - \mu}$, sicherstellen?
Tipp: In welchem Intervall bewegt sich der Rayleigh-Quotient und wann nimmt er sein Maximum an?

(6 Punkte)