

Betrachtung der Scatter-Transformation zur Analyse von Winddaten

Jan Tobias Tesch

Geboren am 7. Februar 1995 in Troisdorf

22. August 2016

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. Jochen Garcke

Zweitgutachter: Dr. Tino Ullrich

Betreuer am Fraunhofer SCAI: Rodrigo Iza-Teran

INSTITUT FÜR NUMERISCHE SIMULATION

FRAUNHOFER-INSTITUT FÜR ALGORITHMEN UND WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Verarbeitung von Daten virtueller Sensoren in Windradsimulationen	4
2.1. Numerische Simulationen von Windrädern	4
2.2. Diffusion Maps	7
3. Bisherige Verfahren zum Pre-Processing von Zeitreihen	9
3.1. Die Fourier-Transformation	9
3.2. Die Littlewood-Paley Wavelet-Transformation	11
3.2.1. Filterung	11
3.2.2. Verfahren	12
3.2.3. Problem	15
4. Scatter-Transformation	16
4.1. Idee	16
4.2. Definition	19
4.3. Eigenschaften	20
5. Konvergenz der Windowed-Scatter-Transformation S_J gegen die Scatter-Transformation \bar{S}	24
5.1. Der Raum $(\bar{P}_\infty, d\mu)$	24
5.2. Scatter-Transformation auf \bar{P}_∞	26
5.3. Vergleich mit der Fourier-Transformation	30
6. Erweiterungen der Scatter-Transformation	34
6.1. Scatter-Transformation für stationäre Prozesse	34
6.2. Frequenz-Scatter-Transformation	37
7. Implementierung	39
7.1. Diskretisierung der Scatter-Transformation	40
7.2. Die wichtigsten Parameter	44
8. Scatter-Transformation zur Analyse von Winddaten	45
8.1. Künstliche Signale	45
8.2. Winddaten	49
9. Zusammenfassung und Ausblick	52

Literatur	53
A. Weitere Polar Plots	55

1. Einleitung

Über 10 % des Elektrizitätsbedarfs der EU wurden 2014 durch Windenergie abgedeckt [1]. Das ist möglich, da sich die Leistung von Windrädern in den letzten 20 Jahren mehr als versiebenfacht hat. Diese Entwicklung ist noch nicht zu Ende. WindEurope, früher The European Wind Energy Association EWEA, rechnet damit, dass sich die Leistung eines einzelnen Windrades noch verdoppeln bis verdreifachen kann [2]. Ein Schritt in der Entwicklung von günstigeren und leistungsfähigeren Windrädern ist, am Computer Simulationen durchzuführen, in denen Parameter, wie zum Beispiel die Höhe des Windrads und die Länge der Rotorblätter, variiert werden. Für einige solcher Konfigurationen werden Simulationen mit verschiedenen Windarten und -richtungen durchgeführt, bei denen simulierte Sensoren beispielsweise die Biegung der Rotorblätter und die Geschwindigkeit des Rotors messen. Ziel ist es, schon vor der tatsächlichen Konstruktion des Windrades die erwartete Leistung zu maximieren und die Wahrscheinlichkeit von Störfällen zu minimieren. Während dieses Entwicklungsschrittes werden sehr viele Simulationen durchgeführt, deren einzelne Analyse durch Menschen zu aufwendig wäre.

In [3] wurde untersucht, wie mit Verfahren zur nichtlinearen Dimensionsreduktion der Analyseaufwand für die Ingenieure verringert werden kann. Diese Verfahren helfen dabei, ähnliche Simulationen zu gruppieren und Simulationen, die abnormales Verhalten zeigen, zu identifizieren. Dadurch muss nicht jede Simulation einzeln von den Ingenieuren ausgewertet werden. Die Ausgabe der numerischen Simulationen sind Sensordaten. Jeder virtuelle Sensor erzeugt eine Menge von Werten $Z = z_1, \dots, z_d$, die die Messungen des Sensors zu verschiedenen Zeitpunkten sind. Um zu entscheiden, ob zwei Simulationen ähnlich sind oder nicht, wird ein Ähnlichkeits- oder Abstandsbegriff für diese Messreihen benötigt. Ein einfacher Ansatz ist, den euklidischen Abstand zwischen den gemessenen Sensorwerten $Z^{(1)} = z_1^{(1)}, \dots, z_d^{(1)}$ der ersten Simulation und $Z^{(2)} = z_1^{(2)}, \dots, z_d^{(2)}$ der zweiten Simulation zu nutzen. Bei diesem Abstandsbegriff wird der punktweise Abstand betrachtet, das heißt stets $z_i^{(1)}$ mit $z_i^{(2)}$ verglichen. Ein Problem dabei ist, dass Simulationen, die gleiches oder zumindest ähnliches Verhalten zeigen, nicht als ähnlich erkannt werden, wenn dieses Verhalten nicht exakt gleichzeitig, sondern zeitversetzt stattfindet. Eine in [3] betrachtete Lösung dieses Problems ist, einen anderen Abstandsbegriff zu nutzen, der in der Lage ist, Zeitverschiebungen und -verformungen zu erkennen. Kapitel 2 wird genauer auf die Simulationen der Windräder und die durch sie erhaltenen Daten eingehen. Außerdem werden wir in Kapitel 2 genauer sehen, wie die Daten in [3] analysiert wurden und wie wir sie in dieser Arbeit analysieren werden.

Statt direkt einen anderen Abstandsbegriff für die Daten $Z^{(1)}$ und $Z^{(2)}$ zu nutzen, können die Daten als ein Schritt des Pre-Processings in eine andere Darstellung transformiert werden. Als Abstandsbegriff für die Simulationen wird dann der gewöhnliche euklidische Abstand dieser Darstellungen verwendet. Ist die Transformation invariant unter Zeitverschiebungen und stabil unter Zeitverformungen, so ist dies auch der resultierende Abstandsbegriff. Die populärste Transformation, die in der Signalverarbeitung verwendet wird [4], ist die Fourier-Transformation, die ein Signal als Zusammensetzung verschiedener Frequenzen darstellt. Eine weitere solche Transformation ist die Wavelet-Transformation [5]. Beide Transformationen können die Anforderungen, invariant unter Verschiebungen *und* stabil unter Verformungen zu sein, jedoch nicht erfüllen. In Kapitel 3 werden beide Verfahren und ihre Schwächen vorgestellt.

In den Kapiteln 4 bis 6 werden die mathematischen Grundlagen der von Mallat im Jahr 2011 für die Klassifizierung von Bild- und Audiodateien vorgestellten Scatter-Transformation betrachtet. Die Kapitel beschäftigen sich mit Mallats Veröffentlichung [6], in der dieser sich mit den mathematischen Aspekten der Transformation auseinandersetzt. Es wird gezeigt, dass die Transformation Stabilität unter Verformungen und Translationsinvarianz vereint. Für die Untersuchung der mathematischen Aspekte wird die Transformation für kontinuierliche Signale $f \in L^2(\mathbb{R})$ betrachtet. Diese Betrachtung kann als Grenzbetrachtung für ein Sample-Intervall, das gegen null geht, interpretiert werden [7]. Darüber hinaus ist es einfacher, kontinuierliche Signale zu betrachten, für die intuitive Begriffe für Regularität und Aspekte wie Zeitverschiebung (Gleichung (1.0.1)) und Stabilität unter Verformungen (Gleichung (1.0.2)) existieren. Trotzdem muss auch betrachtet werden, wie von der kontinuierlichen Transformation zu einer diskreten Transformation gekommen werden kann, ohne die gezeigten Eigenschaften zu verlieren. Dieser Punkt wird in Mallats Veröffentlichung [6] vernachlässigt. Teilweise behandelt Mallat ihn in [7], [8] und [9], eine genauere Untersuchung wäre jedoch wünschenswert. In Kapitel 7.1 werden wir für den Algorithmus, den Mallat in der Implementierung¹ der Scatter-Transformation nutzt, selber eine Verbindung zur kontinuierlichen Scatter-Transformation erarbeiten. Kapitel 7.2 geht auf die in Mallats Implementierung zu wählenden Parameter der Scatter-Transformation ein. In Kapitel 8.1 werden wir uns mit der Auswirkung dieser Parameter auf Aspekte wie Translationsinvarianz und Stabilität unter Verformung für ein einfaches, künstlich erzeugtes Signal beschäftigen, bevor wir das Verfahren in Kapitel 8.2 für die in Kapitel 2 beschriebene Analyse von Winddaten nutzen. Die erzielten Ergebnisse werden wir mit den ebenfalls in Kapitel 2 kurz vorgestellten

¹<http://www.di.ens.fr/data/software/>

Ergebnissen von [3] vergleichen.

Da es der zentrale Punkt dieser Arbeit ist, eine Transformation in eine translationsinvariante und unter Verformungen stabile Darstellung zu finden, möchten wir diese Eigenschaften bereits hier formal definieren. Die Definitionen stimmen mit den von Mallat in [6] gegebenen überein. Sie werden über den Verschiebungsoperator L_c für $c \in \mathbb{R}$ mit $L_c f(t) = f(t-c)$ und den Verformungsoperator L_τ für $\tau \in C^2(\mathbb{R})$ mit $L_\tau f(t) = f(t-\tau(t))$ ausgedrückt. Dass eine Transformation Φ *translationsinvariant* ist, bedeutet, dass:

$$\Phi f = \Phi L_c f. \quad (1.0.1)$$

Mit *Stabilität unter Verformungen* bezeichnen wir formal wie Mallat die Eigenschaft, dass für alle kompakten Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}$ eine Konstante C_Ω existiert, so dass:

$$\|\Phi f - \Phi L_\tau f\|_? \leq C_\Omega \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\tau'(t)\|_\infty \|\tau''(t)\|_\infty \quad (1.0.2)$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ erfüllt ist, wobei $\|-\|_?$ eine geeignete Norm ist.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen herzlich bedanken, die mich bei der Anfertigung meiner Bachelorarbeit unterstützt haben. Speziell gilt mein Dank Prof. Dr. Jochen Garcke für die Möglichkeit, diese Arbeit am Fraunhofer SCAI anzufertigen und die Bereitstellung des Themas. Ebenso möchte ich mich bei meinem Betreuer am Fraunhofer Institut, Dipl. Tech. Math. Rodrigo Iza-Teran bedanken, der immer zur Verfügung stand, wenn ich ihn brauchte, und bei meinem Kollegen Mandar Pathare, der mir eine große Hilfe bei Fragen zu Matlab und anderer Software war. Besonderer Dank gilt meiner Freundin Rebekka für ihre Unterstützung, das sorgfältige Korrekturlesen und die Tipps zur Arbeit mit \LaTeX . Auch meiner Mutter möchte ich für das Korrekturlesen danken.

2. Verarbeitung von Daten virtueller Sensoren in Windradsimulationen

Dieses Kapitel beschreibt die numerischen Simulationen, die in dieser Arbeit analysierten Winddaten erzeugen, und die Schritte, die zur Analyse der Daten in Kapitel 8 durchgeführt werden. Ausführlicher werden beide Sachverhalte in [3], das sich mit den gleichen Daten und Analysemethoden beschäftigt, geschildert.

2.1. Numerische Simulationen von Windrädern

Um die Auswirkungen von Änderungen an der Konstruktion von Windrädern zu testen, werden in den Forschungs- und Entwicklungsabteilungen von Firmen aus der Windenergiebranche tausende numerische Simulationen durchgeführt. Änderungen an der Konstruktion können beispielsweise verschiedene Höhen des Turms, verschiedene Längen und Breiten der Rotorblätter oder verschiedene Ausrichtungen sein. Für jede solche Änderung werden Simulationen mit verschiedenen Umweltparametern, wie Windrichtung, Windstärke und Windart durchgeführt. Die Information über die zu testende Konfiguration, auch Design Load Cases, DLCs, genannt [3], wird dem Simulationstool übergeben. In diesem Tool wird jede für das System relevante physikalische Kraft durch differential-algebraische Gleichungen beschrieben [10]. Die Ausgabe einer Simulation sind Zeitreihen $Z = z_1, \dots, z_d$, die die Messungen virtueller Sensoren darstellen. Durch die Windturbulenzen sind die Sensormessungen verrauscht. Aufgrund der großen Zahl der in der Entwicklung von Windrädern durchzuführenden Simulationen und des Umfangs der dabei anfallenden Daten muss die Verarbeitung dieser automatisiert durchgeführt werden. Eine Möglichkeit dazu ist, die Daten nach gemessenen Extremwerten oder gleichem Schadenslevel, Damage Equivalent Load, zu gruppieren [3]. Dabei werden viele Informationen verloren. Der in [3] und in dieser Arbeit verfolgte Ansatz nutzt die gesamten gesammelten Rohdaten und setzt sich aus den folgenden vier Analyseschritten zusammen:

1. Der erste Schritt ist das Extrahieren der Daten, die untersucht werden sollen. Welche Daten untersucht werden sollen kann vom Wissen über die für die Simulation gewählten Design Load Cases abhängen.
2. Der Pre-Processing-Schritt verändert die in Form von Zeitreihen extrahierten Rohdaten. Eine Möglichkeit ist, diese in die Frequenzdomäne zu transformieren, siehe dazu Kapitel 3.1.
3. Die nach Schritt 2 vorliegenden Daten sind im Allgemeinen hochdimensional. Im

dritten Schritt werden diese durch Verfahren der Dimensionsreduktion [11] in einen niedrigdimensionalen Raum eingebettet. „Ähnliche“ Simulationen liegen bei geeigneten Verfahren im niedrigdimensionalen Raum nah beieinander, während unterschiedliche weiter voneinander entfernt sind.

4. Dieses Wissen über Ähnlichkeiten und abnormales Verhalten nutzt der Ingenieur im letzten Schritt zur interaktiven Untersuchung der Daten. Statt jede Zeitreihe einzeln zu betrachten, genügt es nun, aus jeder Gruppe ähnlicher Simulationen wenige zu betrachten. Mit weiteren Verfahren kann darüber hinaus beispielsweise der Einfluss der Konfigurationsparameter auf die Einbettung untersucht werden.

In Kapitel 8 werden die gleichen Konfigurationen und die gleichen Sensoren wie in [3] untersucht. In [3] wird näher auf diese eingegangen. Der betrachtete Fall ist der sogenannte *storm load case*. Die durchschnittliche Windstärke beträgt bei diesem 39 Meter pro Sekunde, dies ist so viel, dass das Windrad abgeschaltet wird. Es rotiert nur, wenn der Wind direkt von vorne kommt, um die Kraft, die auf die Rotorblätter einwirkt, zu begrenzen. Die Ausrichtung des Windrades kann nach der Abschaltung nicht mehr geändert werden. Es wurden Simulationen für 36 in 10° -Schritten geänderte Windrichtungen und zehn verschiedene Windarten, die sich in der Art der Windturbulenzen unterscheiden, durchgeführt. Insgesamt werden somit 360 Simulationen betrachtet. Jede Simulation umfasst ein Zeitfenster von etwa 11 Minuten. Jeder der 1360 virtuellen Sensoren liefert alle 0,05 Sekunden Messungen. In diesem Fall liefert das Mess- oder allgemein Zeitreihen der Länge 13170. Untersucht werden in dieser Arbeit zwei Sensoren, einer, der die Geschwindigkeit des Rotors misst, und einer, der die Biegung der Rotorblätter misst.

In [3] wird mit den rohen Zeitreihen gearbeitet. Es findet vor der Dimensionsreduktion aus Analyseschritt 3 kein Pre-Processing der Sensordaten statt. Stattdessen werden im Verfahren zur Dimensionsreduktion zwei verschiedene Abstandsbegriffe für die Simulationen genutzt: Einmal die euklidische Distanz der vom untersuchten Sensor gelieferten Zeitreihe und einmal die Dynamic-Time-Warping-Distanz selbiger. Dynamic-Time-Warping (DTW) wird in [12] genauer vorgestellt. Es liefert einen Abstandsbegriff für zwei Zeitreihen $f, g \in \mathbb{R}^d$, der weitestgehend invariant unter Zeitverschiebungen und stabil unter Zeitverformungen ist. Die Idee des Verfahrens ist, eine Matrix D aufzustellen, in der der Eintrag D_{ij} die Distanz $|f_i - g_j|$ ist. Es werden Pfade $p = (D_{i_0 j_0}, D_{i_1 j_1}, \dots, D_{i_n j_n})$, mit $i_0 = j_0 = 1$ und $i_n = j_n = d$, durch diese Matrix betrachtet. Die Länge eines Pfades ist gegeben durch die Summe seiner Einträge. Unter allen Pfaden, die gewisse Bedingungen erfüllen, wird der kürzeste gesucht. Die Länge dieses Pfades ist die DTW-Distanz. In [3] wird gezeigt, dass durch die Nutzung dieses Abstandsbegriffes an Stelle

der euklidischen Distanz die durch das Verfahren zur Dimensionsreduktion erzielten Ergebnisse deutlich verbessert werden können. Ein großer Nachteil von DTW ist der hohe Rechenaufwand. Auch mit ähnlichen Verfahren, zum Beispiel Fast-DTW [13], die die Rechenzeit verkürzen sollen, ist der Aufwand für die betrachteten Datenmengen für die Anwendung in der Praxis zu hoch. Die mit DTW erhaltenen Ergebnisse haben jedoch gezeigt, dass Invarianz unter Zeitverschiebungen und Stabilität unter Zeitverformungen für die Betrachtung von Winddaten aus numerischen Simulationen essentiell sind. Praktisch begründet werden kann dies unter anderem dadurch, dass die Startposition des Rotors in den Simulationen nicht immer identisch ist. Dadurch kommt es zu Zeitverschiebungen innerhalb der Zeitreihen, die für die Analyse der Dynamiken des Windrades uninteressant sind.

Statt auf der Suche nach einem solchen, schneller zu berechnenden Abstandsbegriff weiter Abstandsbegriffe zu betrachten, die sich direkt auf die vorliegenden rohen Zeitreihen beziehen, wird in dieser Arbeit ein anderer Ansatz gewählt: Die Zeitreihen werden im Pre-Processing-Schritt in eine andere Darstellung transformiert. Als Abstandsbegriff zweier Simulationen kann dann der euklidische Abstand der transformierten Zeitreihen genutzt werden. Ist die Transformation translationsinvariant, so ist dies auch der resultierende Abstandsbegriff. Kapitel 3 stellt die bisher für solche Verfahren gängigen Fourier- und Wavelet-Transformationen vor. Es behandelt ebenfalls die bei diesen Verfahren auftretenden Probleme. Die in den Kapiteln 4 bis 6 theoretisch untersuchte Scatter-Transformation verspricht eine sowohl translationsinvariante, als auch unter Zeitverschiebungen stabile Darstellung. In Kapitel 8 werden wir die Scatter-Transformation daher im Pre-Processing für die Analyse der in diesem Kapitel vorgestellten Winddaten anwenden. Im dritten Schritt der Analyse der Winddaten werden wir, wie in [3], das nichtlineare Verfahren Diffusion Maps [14] zur Dimensionsreduktion verwenden. Das Verfahren wird in [14] und in [11] beschrieben. Kapitel 2.2 gibt die Grundidee des Verfahrens wieder.

Während Diffusion Maps in [3] mit den Abstandsbegriffen der euklidischen Distanz und der DTW-Distanz der rohen Zeitreihen verwendet wird, werden wir es mit dem Abstandsbegriff der euklidischen Distanz der Scatter-transformierten Zeitreihen verwenden und die erhaltenen Ergebnisse mit denen aus [3] vergleichen.

2.2. Diffusion Maps

Diffusion Maps ist ein nichtlineares Verfahren zur Dimensionsreduktion. Vorgestellt und eingehend untersucht wurde es in [14]. Auch in [11] wird es behandelt. Im Folgenden wird die Grundidee des Verfahrens vorgestellt:

Die Zeitreihen $Z^{(i)} = z_1^{(i)}, \dots, z_d^{(i)} \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, N$, werden bei Diffusion Maps als Knotenmenge V eines ungerichteten, vollständigen und gewichteten Graphen $G = (V, E, w)$ interpretiert. Eine übliche Wahl der Kantengewichte w ist $w(Z^{(i)}, Z^{(j)}) = e^{-d(Z^{(i)}, Z^{(j)})/\epsilon}$, wobei d ein Abstands begriff für die Zeitreihen ist und $\epsilon > 0$ ein Skalierungsparameter. Das Gewicht einer Kante $\{Z^{(i)}, Z^{(j)}\}$ ist somit umso höher, je ähnlicher sich die Zeitreihen $Z^{(i)}$ und $Z^{(j)}$ sind. Der Skalierungsparameter ϵ bestimmt, wie schnell das Kantengewicht für einander unähnlicher werdende Zeitreihen abfällt. Als Abstands begriff d können beispielsweise der euklidische Abstand oder der DTW-Abstand der Zeitreihen genutzt werden. Mit diesen beiden Abstands begriffen wird das Verfahren in [3] verwendet. Wir werden als Abstands begriff den euklidischen Abstand der Scatter-transformierten Zeitreihen nutzen.

Nachdem der Graph G konstruiert ist, kann eine Irrfahrt mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(Z^{(i)}, Z^{(j)}) = \frac{w(Z^{(i)}, Z^{(j)})}{\sum_{k=1}^N w(Z^{(i)}, Z^{(k)})}$$

zu diesem assoziiert werden. Bei der so definierten Irrfahrt ist die Übergangswahrscheinlichkeit $p(Z^{(i)}, Z^{(j)})$ zwischen zwei Zeitreihen umso höher, je ähnlicher sich diese bezüglich d sind.

Über die Betrachtung der Irrfahrt auf G ergibt sich ein neuer Abstands begriff für die Zeitreihen, die sogenannte *Diffusion Distance*. Diese ist für alle $q \in \mathbb{N}$ definiert durch:

$$D_q^2(Z^{(i)}, Z^{(j)}) = \sum_{k=1}^N \frac{(p_q(Z^{(i)}, Z^{(k)}) - p_q(Z^{(j)}, Z^{(k)}))^2}{\pi(Z^{(k)})},$$

wobei $\pi(-)$ die stationäre Verteilung der Irrfahrt ist und $p_q(Z^{(i)}, Z^{(j)})$ die Wahrscheinlichkeit, in q Zeitschritten von $Z^{(i)}$ nach $Z^{(j)}$ zu kommen. Bezüglich der Diffusion Distance D_q sind zwei Zeitreihen $Z^{(i)}$ und $Z^{(j)}$ sich ähnlich, wenn bei der Irrfahrt auf G , egal ob aus $Z^{(i)}$ oder $Z^{(j)}$ gestartet wird, in q Zeitschritten, mit etwa der gleichen Wahrscheinlichkeit, dieselben Zeitreihen $Z^{(k)}$ erreicht werden.

Diffusion Maps liefert eine Einbettung der d -dimensionalen Zeitreihen in einen p -dimensionalen Raum, $p \ll d$, so dass der euklidische Abstand der eingebetteten Zeitreihen

die Diffusion Distance bestmöglich approximiert. Die Einbettung ist gegeben durch die Diffusion Map

$$\Psi_q^p(Z^{(i)}) = [\lambda_1^q(\psi_1)_i, \dots, \lambda_p^q(\psi_p)_i],$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ die p größten Eigenwerte der Übergangsmatrix $P = p(Z^{(i)}, Z^{(j)})_{i,j=1}^N$ sind und ψ_1, \dots, ψ_p die zugehörigen rechten Eigenvektoren.

3. Bisherige Verfahren zum Pre-Processing von Zeitreihen

In Kapitel 3.1 betrachten wir die Fourier-Transformation und die bei ihr bei hohen Frequenzen auftretenden Instabilitäten. Weiterführende Informationen zur Fourier-Transformation für kontinuierliche und diskrete Signale finden sich in [15] und [4]. Kapitel 3.2 behandelt die Wavelet-Transformation und mit ihr einhergehende Probleme bei Klassifizierungsaufgaben. Mehr zur Wavelet-Transformation findet sich in [5] und [7]. Die vorgestellte Wavelet-Transformation ist die sogenannte Littlewood-Paley Wavelet-Transformation [16], wie sie von Mallat in [6] beschrieben wird. Die hier dargestellten Probleme werden von Mallat in [6] und [17] aufgeführt.

3.1. Die Fourier-Transformation

Die *Fourier-Transformation* \hat{f} eines Signales $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Für eine große Klasse von Funktionen ist die Transformation invertierbar mit Rücktransformation

$$f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

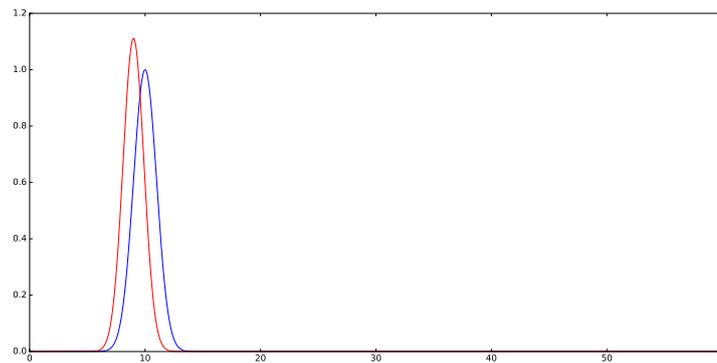
Die Formel der Rücktransformation liefert eine Interpretation der Transformation: Das Signal f kann als (überabzählbare) Kombination von Sinusoiden $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ geschrieben werden. Der Betrag $|\hat{f}(\omega)|$, auch Amplitudenspektrum von f genannt, gibt an, wie viel von $e^{i\omega t}$, das heißt von der Frequenz ω , in f enthalten ist. Die Fourier-Transformation kann deshalb auch als Verbindung der Zeitdomäne, das heißt der Darstellung von f in Abhängigkeit zur Zeit, und der Frequenzdomäne, das heißt der Darstellung von f in Abhängigkeit zur Frequenz, betrachtet werden.

Die Fourier-Transformation kann auf $L^2(\mathbb{R})$ erweitert werden [7]. Für unsere Zwecke ist die Fourier-Transformation nicht optimal, denn sie ist weder translationsinvariant, da $\widehat{L_c f}(\omega) = e^{-ic\omega} \hat{f}(\omega)$, noch stabil unter dem Verformungsoperator L_τ . Das Amplitudenspektrum $|\hat{f}|$ ist wegen $|e^{-ic\omega}| = 1$ zwar translationsinvariant, bietet jedoch ebenfalls keine Stabilität unter Verformungen, wie folgende Überlegung zeigt:

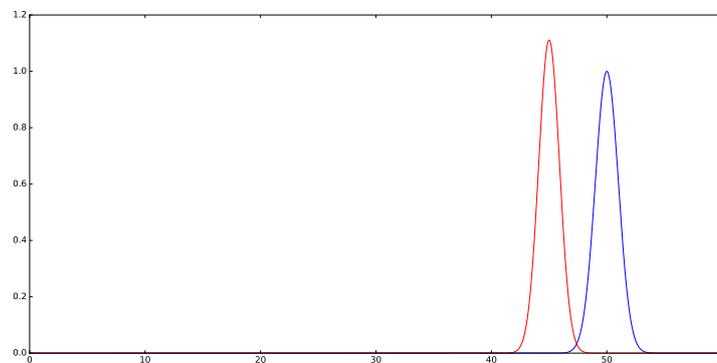
Für $f_\xi(t) = e^{i\xi t} e^{-t^2/2}$ gilt $\hat{f}_\xi(\omega) = e^{-(\omega-\xi)^2/2}$, das heißt die Frequenzdarstellung von f_ξ ist gegeben durch eine Gauß-Funktion deren Zentrum die sogenannte Mittenfrequenz ξ ist. Für eine einfache, lineare Verformung $\tau(t) = st$ ergibt sich

$\widehat{L_\tau f_\xi}(\omega) = (1-s)^{-1} \hat{f}_\xi((1-s)^{-1}\omega)$. Die Mittenfrequenz und somit die Gauß-Funktion

werden von ξ nach $(1 - s)\xi$ verschoben. Je größer die Mittenfrequenz ist, desto stärker die Verschiebung. Abbildung 3.1.1 illustriert dies für f_{10} und f_{50} mit $\tau(t) = 0,1t$. Bei Mittenfrequenz 10 überlappen die Graphen der Fourier-Transformierten des Originalsignals und der Fourier-Transformierten des verformten Signals stark. Für die höhere Mittenfrequenzen 50 ist dies nicht mehr der Fall.



(a) In blau: $\widehat{f}_{10}(t) = e^{-(\omega-10)^2/2}$. In rot: Die Fourier Transformation des mit $\tau(t) = 0,1t$ verformten Signals: $\widehat{L_\tau f_{10}}(t) = 0,9^{-1}e^{-(0,9^{-1}\omega-10)^2/2}$.



(b) In blau: $\widehat{f}_{50}(t) = e^{-(\omega-50)^2/2}$. In rot: Die Fourier Transformation des mit $\tau(t) = 0,1t$ verformten Signals: $\widehat{L_\tau f_{50}}(t) = 0,9^{-1}e^{-(0,9^{-1}\omega-50)^2/2}$.

Abbildung 3.1.1: Instabilität der Fourier-Transformation unter Zeitverformung für hochfrequente Signale.

Das zeigt, dass die Fourier-Transformation für Verformungen hochfrequenter Signale keine stabilen Ergebnisse liefert. Das von Mallat in [6] auf S. 1334 angegebene proportionale

Verhalten des Abstands zur Mittenfrequenz ξ in der Form:

$$\left\| |\widehat{\mathcal{L}_\tau f}| - |\hat{f}| \right\|_2 \sim s |\xi| \|f_\xi\|_2 = \|\nabla \tau\|_\infty |\xi| \|f\|_2$$

kann jedoch nicht korrekt sein, da der Abstand mit der Dreiecksungleichung, dem Satz von Plancharel und Substitution unabhängig von $|\xi|$ abgeschätzt werden kann durch:

$$\left\| |\widehat{\mathcal{L}_\tau f}| - |\hat{f}| \right\|_2 \leq \|\widehat{\mathcal{L}_\tau f}\|_2 + \|\hat{f}\|_2 = \left(1 + (1-s)^{-\frac{1}{2}}\right) \|\hat{f}\|_2.$$

In Kapitel 5.3 werden wir die Stabilitätseigenschaften der Fourier-Transformation mit denen der Scatter-Transformation vergleichen.

3.2. Die Littlewood-Paley Wavelet-Transformation

Die Wavelet-Transformation eines Signals kann als Filterung aufgefasst werden. Kapitel 3.2.1 stellt das Konvolutionstheorem vor, das hilft, das Konzept der Filterung zu verstehen. In 3.2.2 wird die Wavelet-Transformation selber vorgestellt und in 3.2.3 wird auf die Probleme eingegangen, die bei der Nutzung der Wavelet-Transformation im Pre-Processing der Analyse der Winddaten auftreten.

3.2.1. Filterung

Das Konvolutionstheorem lautet wie folgt:

Satz 3.2.1 (Konvolutionstheorem). *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ mit Faltung*

$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy$. *Dann gilt:*

- $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$ und
- $\hat{f} * \hat{g} = \widehat{fg}$.

Das bedeutet, dass Faltung in der Zeitdomäne Multiplikation in der Frequenzdomäne entspricht und umgekehrt. Wir betrachten als Beispiel die Funktion

$$\phi(t) = 3 \frac{\sin(1.5t)}{1.5t} \quad \text{mit} \quad \hat{\phi}(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{3}\right) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in [-1.5, 1.5] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für ein Signal f gilt mit Satz (3.2.1) $\widehat{f * \phi} = \hat{f} \hat{\phi}$, das heißt das gefilterte Signal $f * \phi(t)$ enthält genau die Frequenzen von f , die größer als -1.5 und kleiner als 1.5 sind. Abbildung 3.2.2 zeigt dies für das Signal $f(t) = 1 + 3 \sin(t) - 4 \sin(3t) + 2 \sin(7t)$.

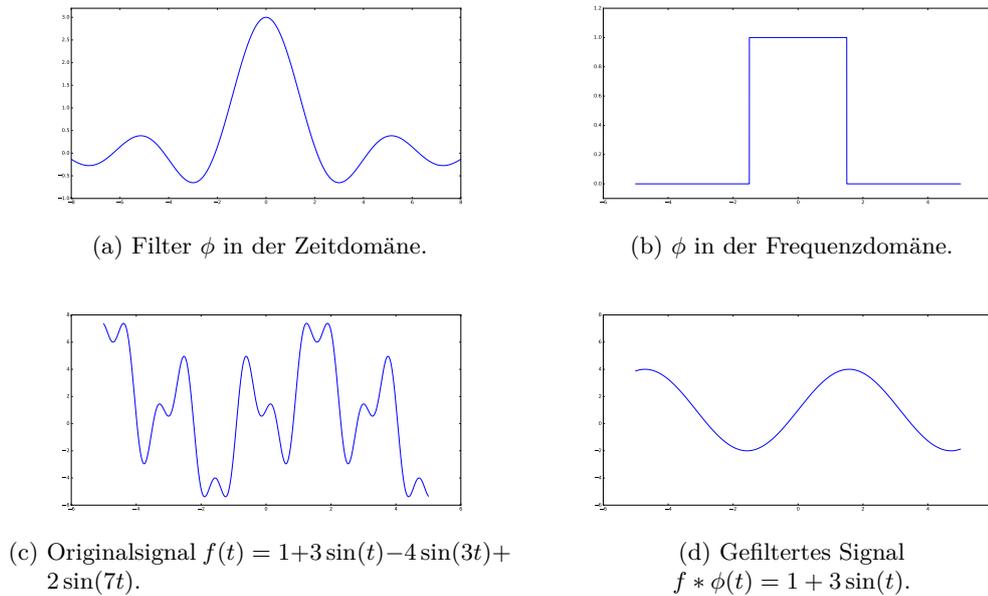


Abbildung 3.2.2: Beispiel für die Filterung eines Signals mit einem Tiefpass ϕ .

Funktionen, die, wie ϕ , bei einer Filterung hauptsächlich tiefe Frequenzen durchlassen, werden Tiefpass genannt. Ein Bandpass ist ein Filter, der hauptsächlich Frequenzen aus einem Intervall $I = [\xi - 0.5B, \xi + 0.5B]$ (mit $0 \notin I$) um seine Mittenfrequenz ξ passieren lässt. Die Länge von I wird Bandbreite B des Filters genannt.

3.2.2. Verfahren

Bei der Wavelet-Transformation wird ein Signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ nicht mit *einer* Funktion gefiltert, sondern mit mehreren, einer Filterbank. Um diese zu erstellen, wird ein sogenanntes Mutterwavelet $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ gewählt. Skalierung von ψ mit $(2^{1/Q})^j$, $j \in \mathbb{Z}$, für einen Parameter Q , liefert die Filterbank

$$\Psi = \left\{ \psi_{(2^{1/Q})^j}(t) = (2^{1/Q})^j \psi \left((2^{1/Q})^j t \right) \right\}_{j \in \mathbb{Z}}$$

mit den Fourier-Transformierten

$$\hat{\Psi} = \left\{ \widehat{\psi_{(2^{1/Q})^j}}(\omega) = \hat{\psi} \left((2^{1/Q})^{-j} \omega \right) \right\}_{j \in \mathbb{Z}}.$$

Die *Wavelet-Transformation* eines Signals f ist die Filterung von f mit den Filtern aus Ψ :

$$Wf = \left\{ f * \psi_{(2^{1/Q})^j} \right\}_{j \in \mathbb{Z}}.$$

Für reelle f gilt $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$. Um bei der Filterung keine Informationen zu verlieren, muss $\hat{\Psi}$ deshalb die gesamte nicht-negative Frequenzachse $[0, \infty)$ abdecken. Um übermäßige Redundanz in Wf zu vermeiden, sollen sich die Frequenzbereiche, in denen die Energie der $\widehat{\psi_{(2^{1/Q})^j}}$ konzentriert ist, möglichst nicht überschneiden. Dazu wird als Mutterwavelet ψ ein Bandpass gewählt, dessen Mittenfrequenz ξ der Einfachheit halber auf 1 normiert wird. Die Mittenfrequenz von $\psi_{(2^{1/Q})^j}$ ist $(2^{1/Q})^j$. An dieser Stelle wird der Einfluss des Parameters Q ersichtlich. Q ist die Anzahl Wavelets pro Verdopplung der Frequenz. Je größer Q , desto besser ist die Frequenzauflösung der Transformation. Damit $\hat{\Psi}$ ganz $[0, \infty)$ abdeckt, wird die Bandbreite von $\hat{\psi}$ von der Ordnung Q^{-1} gewählt. Die Bandbreite von $\widehat{\psi_{(2^{1/Q})^j}}$ ist dann von der Ordnung $(2^{1/Q})^j Q^{-1}$. Das bedeutet, dass die Bandbreiten der Wavelets größer werden, je größer ihre Mittenfrequenz ist. Dadurch werden Instabilitäten unter Verformungen, die, wie wir in Kapitel 3.1 gesehen haben, bei der Fourier-Transformation durch größer werdende Verschiebungen im hochfrequenten Bereich auftreten, vermieden.

Zur Vereinfachung der Notation wird im folgenden $Q = 1$ gewählt und $\Lambda = \{2^j, j \in \mathbb{Z}\}$ geschrieben. Die Schreibweise $W[\lambda]f$, $\lambda \in \Lambda$ bezeichnet $f * \psi_\lambda$.

Die Wavelet-Transformation verwendet abzählbar unendlich viele Wavelets um die Frequenzen um 0 abzudecken. Das vermeidet die Wavelet-Transformation der Auflösung J . Für diese werden $\Lambda_J = \{2^j, j \in \mathbb{Z}, j > -J\}$ und die Filterbank $\Psi_J = \{\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda_J\}$ definiert. Ψ_J enthält nur Filter mit Mittenfrequenz größer als 2^{-J} . Die tiefen Frequenzen von f , die bei einer Filterung mit Ψ_J verloren gehen, werden durch einen Tiefpass ϕ_J wiedergewonnen. Es ergibt sich die *Wavelet-Transformation der Auflösung J* :

$$W_J f = \left(A_J f, \{W[\lambda]f\}_{\lambda \in \Lambda_J} \right)$$

mit $A_J f = f * \phi_J$.

Abbildung 3.2.3 zeigt die Frequenzdarstellung der Filterbank $\{\phi_J, \{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_J}\}$ für von links nach rechts größer werdende Auflösungen J . Je kleiner J ist, desto größer ist die minimale Mittenfrequenz, die durch die ψ_λ , deren Fourier-Transformierte in blau dargestellt sind, abgedeckt wird. Damit trotzdem die gesamte Ache $[0, \infty)$ abgedeckt wird, hat der zugehörige Tiefpass ϕ_J , dessen Fourier-Transformierte in rot dargestellt ist, für kleinere J eine größere Frequenzbandbreite. Gleichzeitig bedeutet dies, dass die Frequenzauflösung der Transformation im niederfrequenten Bereich schlechter wird. Als Mutterwavelet wurde hier ein Spline-Wavelet [7] der Ordnung 3 genutzt. Die unten dargestellten Filterbänke werden zur Transformation eines diskreten Signals mit 8192 Samplen genutzt.

Kapitel 6.1 geht näher auf die Konstruktion der Filterbänke für Zeitreihen $f \in \mathbb{R}^d$ ein.

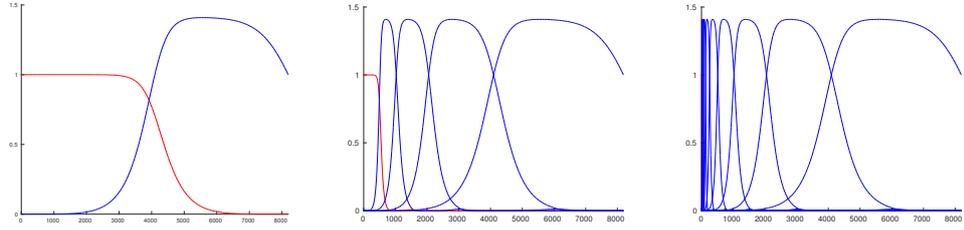


Abbildung 3.2.3: Frequenzdarstellung der für die Wavelet-Transformation der Auflösung J einer Zeitreihe der Länge 8192 genutzten Filter für von links nach rechts größer werdende Auflösung J . In rot: Fourier-Transformation des Tiefpasses ϕ_J . In blau: Fourier-Transformierte der skalierten Wavelets ψ_λ .

Die Norm der Wavelet-Transformation ist definiert als die euklidische Norm der L^2 -Normen der Koeffizienten:

$$\|Wf\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} \|W[\lambda]f\|_2^2.$$

Für die Wavelet-Transformation der Auflösung J ist die Norm analog definiert als:

$$\|W_J f\|^2 = \|A_J f\|_2^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda_J} \|W[\lambda]f\|_2^2.$$

Die Bedingung, dass die Filter aus Ψ bzw. aus $\{\phi_J, \Psi_J\}$ die gesamte Frequenzachse abdecken, kann formal ausgedrückt werden als:

$$\left| \widehat{\phi}_0(2^J \omega) \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j > -J} \left(\left| \widehat{\psi}(2^{-j} \omega) \right|^2 + \left| \widehat{\psi}(-2^{-j} \omega) \right|^2 \right) = 1 \quad (3.2.1)$$

für alle $J \in \mathbb{Z}$ und fast alle $\omega \in [0, \infty)$.

Mallat zeigt in [6] auf S. 1335 folgenden Satz:

Satz 3.2.2 (Unitarität der Wavelet-Transformation). *Die Wavelet-Transformationen W und W_J sind genau dann unitär auf $L^2(\mathbb{R})$, wenn Bedingung 3.2.1 erfüllt ist.*

Wird gefordert, dass die Bedingung für alle $\omega \in [0, \infty)$ erfüllt ist, impliziert sie, dass:

$$\widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$$

gilt. Das Integral der Wavelets ist somit 0. Von der Vorstellung, dass die Wavelets in der Zeitdomäne unter und über der x-Achse schwingen und zu 0 integrieren haben sie ihren

Namen: Der Begriff Wavelet stammt vom französischen Wort „ondelette“ – kleine Welle.

3.2.3. Problem

Im Zuge des Beweises der Stabilität der Windowed-Scatter-Transformation (siehe Satz 4.3.4) in [6] beweist Mallat ebenfalls die Stabilität der Transformationen W_J unter Verformungen. Die Transformationen W_J sind jedoch nicht translationsinvariant. Weiterhin hängt die Stabilität unter Verformungen von der Auflösung J ab. Je höher die Auflösung, desto instabiler. Bei Klassifizierungsaufgaben, die die Wavelet-Transformation nutzen, werden daher häufig schlechte Auflösungen für eine erste Einordnung genutzt. Schritt für Schritt werden die möglichen Klassen eingegrenzt und die Auflösung erhöht. Das ist in der Praxis jedoch problematisch, da die ersten Einordnungen auf Grund der schlechten Auflösung häufig bereits Fehler enthalten, die im späteren Verlauf nicht mehr ausgeglichen werden können [17]. Erinnern wir uns, dass wir, wie in Kapitel 2 dargestellt, eine Transformation für das Pre-Processing in Schritt 2 des Analyseverfahrens von Winddaten suchen, ist klar, dass wir nur einmal eine Auflösung wählen möchten. Eine Erhöhung der Auflösung im Nachhinein ist nicht möglich. Die Wavelet-Transformation entspricht somit weder unseren Forderungen nach Translationsinvarianz, noch den Forderungen nach einer stabilen und zugleich informativen Darstellung eines Signals.

Die Scatter-Transformation setzt an der Wavelet-Transformation an. Sie baut diese so aus, dass die Stabilität auch bei einer Erhöhung der Auflösung erhalten bleibt. Zusätzlich bietet sie annähernd Translationsinvarianz.

4. Scatter-Transformation

In diesem Kapitel betrachten wir die Scatter-Transformation. Kapitel 4.1 beschreibt den Weg von der Wavelet-Transformation zur Scatter-Transformation und erläutert die Idee des Verfahrens. Neben der Scatter-Transformation wird auch die Windowed-Scatter-Transformation vorgestellt. Kapitel 4.2 definiert die Scatter- und die Windowed-Scatter-Transformation formal und Kapitel 4.3 führt die wichtigsten Eigenschaften der Windowed-Scatter-Transformation auf. Kapitel 5 wird sich damit beschäftigen, wie diese von der Windowed-Scatter-Transformation auf die Scatter-Transformation übertragen werden können. Beide Kapitel sind eine Aufarbeitung von Mallats Veröffentlichung [6].

4.1. Idee

Zuerst beschäftigen wir uns mit der Forderung nach Translationsinvarianz. Eine Substitution zeigt, dass die Koeffizienten $W[\lambda]f$ der Wavelet-Transformation mit Translationen vertauschen:

$$W[\lambda]L_c f(t) = L_c f * \psi_\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s-c)\psi_\lambda(t-s)ds = f * \psi_\lambda(t-c) = L_c W[\lambda]f(t).$$

Eine Möglichkeit translationsinvariante Koeffizienten zu erhalten, ist, über die Koeffizienten zu integrieren, denn wiederum mit Substitution ergibt sich für alle $g \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} L_c g(t)dt.$$

Wegen der Wavelet-Eigenschaft $\int_{\mathbb{R}} \psi dt = 0$ liefert der Satz von Fubini jedoch

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f * \psi_\lambda(t)dt &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(s)\psi_\lambda(t-s)dsdt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s) \int_{\mathbb{R}} \psi_\lambda(t-s)dt ds = 0 \end{aligned}$$

für alle λ . Alle Koeffizienten wären somit null. Aus der Filterungssicht kann dies dadurch erklärt werden, dass das Integral, wegen $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt$, als Tiefpass, der nur die 0-Frequenz durchlässt, interpretiert werden kann. Da $f * \psi_\lambda$ jedoch nach Satz (3.2.1) nur Frequenzen aus dem Frequenzband von ψ_λ enthält, gilt $\int_{\mathbb{R}} f * \psi_\lambda(t)dt = 0$. In [18] zeigt Estrach, ein Mitarbeiter von Mallat, dass alle linearen Transformationen von $W[\lambda]f$, die translationsinvariant sind, null sein müssen. Mallat sucht daher eine *nicht-lineare* Transformation $M[\lambda]$, so dass diese ebenfalls mit Translationen vertauscht, aber $\int_{\mathbb{R}} M[\lambda]W[\lambda]f(t)dt \neq 0$ gilt, und die Stabilität des Operators $W[\lambda]$ unter Verformungen

erhalten bleibt. Um letzteres zu erreichen fordert er, dass $M[\lambda]$ mit Verformungen vertauscht und nicht-ausdehnend ist, das bedeutet $|M[\lambda]f - M[\lambda]g| \leq |f - g|$. Ebenfalls in [18] zeigt Estrach, dass aus diesen Eigenschaften folgt, dass $M[\lambda]$ ein punktwiser Operator sein muss, das heißt, dass für alle $h \in L^2(\mathbb{R})$ $M[\lambda]h(t)$ nur von h an der Stelle t abhängen kann. Um auch die Normerhaltung der Wavelet-Transformation aus Satz (3.2.2) für die Scatter-Transformation zu erhalten, fordert Mallat zusätzlich $\|M[\lambda]h\|_2 = \|h\|_2$ für alle $h \in L^2(\mathbb{R})$. Zusammen mit der von Estrach gezeigten Bedingung folgt $|M[\lambda]h(t)| = |h(t)|$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für die Scatter-Transformation wählt Mallat $M[\lambda]h = |h|$.

Für den Betragsoperator M gilt $\int_{\mathbb{R}} MW[\lambda]f(t)dt \neq 0$, da M für geeignete Wavelets (siehe (4.1.1)) das Frequenzspektrum von $f * \psi_\lambda$ von $[\lambda - 0.5B, \lambda + 0.5B]$, mit B der Bandbreite von ψ_λ , in ein Intervall um 0 verschiebt. Dies kann mit dem Konvolutionstheorem 3.2.1 wie folgt gesehen werden:

$$\begin{aligned} |\widehat{W[\lambda]f}|^2(\omega) &= \widehat{W[\lambda]f} * \widehat{W[\lambda]f}(\omega) \\ &\stackrel{4.1.1}{=} \int_{\mathbb{R}} \widehat{W[\lambda]f}(\xi) \widehat{W[\lambda]f}(\xi - \omega) d\xi. \end{aligned}$$

Da $W[\lambda]f$ hauptsächlich Frequenzen aus $[\lambda - 0.5B, \lambda + 0.5B]$ enthält, enthält $|W[\lambda]f|^2$ hauptsächlich Frequenzen aus $[-B, B]$. Damit die zweite Gleichheit gilt, muss ψ so gewählt sein, dass

$$\widehat{W[\lambda]f}(\omega) = \widehat{W[\lambda]f}(-\omega). \quad (4.1.1)$$

Die Scatter-Koeffizienten 0. und 1. Ordnung ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} S^{(0)}f &= \int_{\mathbb{R}} f(t)dt \\ S^{(1)}f &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f * \psi_\lambda(t)| dt \right\}_{\lambda \in \Lambda}. \end{aligned}$$

Die Frequenzen von $|f * \psi_\lambda|$, die ungleich null sind, gehen bei der Integration verloren. Folgendes aus [6] entnommenes Beispiel zeigt jedoch, dass sie wertvolle Informationen über Interferenzen enthalten. Für $f(t) = \cos(\xi_1 t) + a \cos(\xi_2 t)$, mit ξ_1 und ξ_2 im Frequenzband von ψ_λ , gilt

$$|f * \psi_\lambda(t)| = \frac{1}{2} \left| \widehat{\psi}_\lambda(\xi_1) + a \widehat{\psi}_\lambda(\xi_2) e^{i(\xi_2 - \xi_1)t} \right|.$$

Das bedeutet $|f * \psi_\lambda|$ oszilliert mit der Frequenz $\xi_2 - \xi_1$. Um die Information über unterschiedliche Frequenzen im Frequenzband eines einzelnen Wavelets nicht zu verlieren, führt die Scatter-Transformation im 2. Schritt eine weitere Wavelet-Transformation für

jedes $|f * \psi_\lambda|$, $\lambda \in \Lambda$ durch. Um Translationsinvarianz dieser Koeffizienten 2. Ordnung zu erreichen, wird anschließend wie im 1. Schritt über den Betrag der Wavelet-Koeffizienten integriert. Es ergeben sich die Scatter-Koeffizienten 2. Ordnung:

$$S^{(2)}f = \left\{ \int_{\mathbb{R}} ||f * \psi_{\lambda_1}| * \psi_{\lambda_2}(t)| dt \right\}_{\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda}.$$

Die Scatter-Transformation setzt dies immer weiter fort. Die Scatter-Koeffizienten sind die Koeffizienten aller Ordnungen zusammengenommen:

$$Sf = \{S^{(0)}f, S^{(1)}f, S^{(2)}f, \dots\}.$$

In dieser Form ist die Transformation nur für $f \in L^1(\mathbb{R})$ wohldefiniert (siehe Kapitel 4.2). Dieses Problem wird durch die Windowed-Scatter-Transformation beseitigt. Statt über die Koeffizienten zu integrieren, das heißt einen Tiefpass zu nutzen, der nur die 0-Frequenz durchlässt, nutzt die Windowed-Scatter-Transformation der Auflösung J , wie die Wavelet-Transformation der Auflösung J , einen Tiefpass $\phi_J \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, der auch Frequenzen um 0 herum durchlässt. Analog zur Wavelet-Transformation müssen nur die höheren Frequenzen durch die ψ_λ abgedeckt werden. Die Koeffizienten der Windowed-Scatter-Transformation der Auflösung J sind:

$$S_J f = \left\{ f * \phi_J, \{|f * \psi_\lambda| * \phi_J\}_{\lambda \in \Lambda_J}, \{||f * \psi_{\lambda_1}| * \psi_{\lambda_2}| * \phi_J\}_{\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_J}, \dots \right\}.$$

Da nun nicht mehr über die Beträge der Wavelet-Koeffizienten integriert wird, ist die Transformation S_J nicht translationsinvariant, sondern nur annähernd translationsinvariant unter Verschiebungen, die klein bezüglich des Zeitfensters von ϕ_J sind. Im Gegenzug ist diese Transformation jedoch normerhaltend (Satz (4.3.2)) und stabil unter Verformungen (Satz (4.3.4)).

Je größer J , desto schmaler das Frequenzband von ϕ_J und desto größer die Fensterbreite in der Zeitdomäne. Faltung mit ϕ_J wird somit für größer werdendes J immer ähnlicher zu Integration. Für $J \rightarrow \infty$ hat die Windowed-Scatter-Transformation daher eine immer größere Ähnlichkeit zur Scatter-Transformation. Über diesen Limes erweitert Mallat die Scatter-Transformation auf Funktionen aus $L^2(\mathbb{R})$. Darüber hinaus versucht er, L^2 -Konvergenz der Windowed-Scatter-Transformation gegen die Scatter-Transformation in einem Raum $L^2(\bar{P}_\infty, d\mu)$ zu zeigen. Dadurch ließen sich die Normerhaltung und die Stabilität der Windowed-Scatter-Transformation auf die Scatter-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ übertragen. Mallat gelingt kein Beweis der Konvergenz, er vermutet jedoch, dass sie gilt.

In Kapitel 5 werden wir genauer auf die Erweiterung der Scatter-Transformation für $L^2(\mathbb{R})$ -Funktionen und Mallats Vermutung zur Konvergenz eingehen.

4.2. Definition

Um die in Kapitel 4.1 vorgestellten Transformationen formal zu definieren, werden einige Begriffe benötigt.

Definition 4.2.1 (Scattering Propagator). *Ein Vektor $p = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ mit $\lambda_i \in \Lambda$ heißt Pfad. Für $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ sei $U[\lambda]f = |f * \psi_\lambda|$. Der Scattering Propagator $U[p]$ zum Pfad p ist definiert durch:*

$$U[p] = U[\lambda_m] \dots U[\lambda_2] U[\lambda_1]$$

wobei für den leeren Pfad $p = \emptyset$ gilt $U[\emptyset] = Id$.

Die Skalierung eines Pfades $2^l p$ bezeichnet die elementweise Skalierung:

$2^l p = (2^l \lambda_1, \dots, 2^l \lambda_m)$. Die Addition $p + \lambda$ bezeichnet den Weg $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda)$. Ist $f \in L^1(\mathbb{R})$, so folgt mit dem Satz von Fubini, dass auch $U[\lambda]f$ in $L^1(\mathbb{R})$ ist. Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung zwar $U[\lambda]f \in L^2(\mathbb{R})$, jedoch gilt nicht notwendigerweise $U[\lambda]f \in L^1(\mathbb{R})$, weshalb die Scatter-Transformation nur für Funktionen aus $L^1(\mathbb{R})$ wohldefiniert ist:

Definition 4.2.2 (Scatter-Transformation). *Sei P_∞ die Menge aller endlicher Pfade. Für $p \in P_\infty$ und $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist die Scatter-Transformation definiert als:*

$$\bar{S}f(p) = \frac{1}{\mu_p} \int_{\mathbb{R}} U[p]f(t)dt \quad \text{mit} \quad \mu_p = \int_{\mathbb{R}} U[p]\delta(t)dt.$$

Der Faktor μ_p ist ein Normalisierungsfaktor (siehe Kapitel 5). Bis auf diesen entspricht die Definition genau der Idee aus Kapitel 4.1. Die Scatter-Koeffizienten m -ter Ordnung sind die Koeffizienten $\bar{S}f(p)$ mit Pfaden p der Länge m .

Um die Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ -Funktionen zu erweitern, wird die Windowed-Scatter-Transformation definiert:

Definition 4.2.3 (Windowed-Scatter-Transformation). *Sei P_J die Menge aller endlichen Pfade $p = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ mit $\lambda \in \Lambda_J$. Für $p \in P_J$ und $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ ist die Windowed-Scatter-Transformation definiert als:*

$$S_J[p]f(t) = U[p]f * \phi_J(t) = \int_{\mathbb{R}} U[p]f(s)\phi_J(t-s)ds.$$

Für jede Menge von Pfaden Ω werden die Normen von $S_J[\Omega]f$ und $U[\Omega]f$ definiert als die euklidischen Normen der L^2 -Normen der Koeffizienten:

$$\|S_J[\Omega]f\|^2 = \sum_{p \in \Omega} \|S_J[p]f\|_2^2$$

und

$$\|U[\Omega]f\|^2 = \sum_{p \in \Omega} \|U[p]f\|_2^2.$$

Ist $\phi(t)$ stetig in 0, so gilt für $f \in L^1(\mathbb{R})$ wegen $\phi_J(t) = 2^{-J}\phi(2^{-J}t)$:

$$\lim_{J \rightarrow \infty} 2^J S_J[p]f(t) = \phi(0) \int_{\mathbb{R}} U[p]f(s) ds = \phi(0) \mu_p \bar{S}f(p) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Das heißt für $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $J \rightarrow \infty$ konvergiert die Windowed-Scatter-Transformation punktweise in der Pfadvariablen p gegen die Scatter-Transformation.

4.3. Eigenschaften

In diesem Kapitel werden wir die wichtigsten Eigenschaften der Windowed-Scatter-Transformation betrachten. Ausführlicher behandelt und bewiesen werden diese in [6]. Kapitel 5 wird sich damit beschäftigen, diese Eigenschaften über eine L^2 -Konvergenz auf die Scatter-Transformation zu übertragen.

Folgende Aussage ist wichtig für die Stabilität der Windowed-Scatter-Transformation:

Satz 4.3.1. *Die Windowed-Scatter-Transformation mit Wavelets, die Bedingung 3.2.1 erfüllen, ist nicht-ausdehnend, das heißt für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ gilt:*

$$\|S_J[P_J]f - S_J[P_J]g\| \leq \|f - g\|_2$$

Die Idee des Beweises ist, zu nutzen, dass die Wavelet-Transformation mit solchen Wavelets unitär (Satz (3.2.2)) und somit nicht ausdehnend ist, und der Betrag in dem Sinne nicht ausdehnend ist, dass $||a| - |b|| \leq |a - b|$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$.

Für die nächste Aussage wird die Menge Λ_J^m benötigt. Diese Produktmenge beinhaltet alle Pfade der Länge m aus P_J . Satz (4.3.2) besagt zum einen, dass die Windowed-Scatter-Transformation für geeignete Wavelets die Norm erhält (Gleichung (4.3.2)) und zum anderen die Energie in längeren Pfaden gegen null läuft (Gleichung (4.3.1)). Letzteres haben bereits unsere Überlegungen aus Kapitel 4.1 zur Funktion des Betragsoperators nahegelegt. Dieser schiebt die Energie bei jeder Anwendung in niederfrequenterer

Bereiche, bis sie letztendlich durch den Tiefpass ϕ_J absorbiert wird.

Satz 4.3.2. *Ein Scattering-Wavelet ψ wird zulässig genannt, wenn ein $\eta \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\rho \geq 0$, $\hat{\rho}(0) = 1$ und*

$$|\hat{\rho}(\omega - \eta)| \leq |\hat{\phi}(2\omega)|$$

existieren, so dass die Funktion:

$$\hat{\Psi}(\omega) = |\hat{\rho}(\omega - \eta)|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - |\hat{\rho}(2^{-k}(\omega - \eta))|^2)$$

erfüllt, dass:

$$\inf_{1 \leq |\omega| \leq 2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(2^{-j}\omega) |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 + \hat{\psi}(-2^{-j}\omega) |\hat{\psi}(-2^{-j}\omega)|^2 > 0.$$

Ist dies erfüllt, so gilt für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2 = 0 \quad (4.3.1)$$

und

$$\|S_J[P_J]f\| = \|f\|_2. \quad (4.3.2)$$

Ein Beweis wird in [6] auf den Seiten 1342 bis 1344 und Anhang A gegeben. Der Beweis beinhaltet auf S. 1343 einen kleinen Fehler, da Mallat von einer Äquivalenz spricht, die keine ist. Die für den Beweis benötigte Implikation gilt jedoch. Für die tatsächliche Anwendung der Windowed-Scatter-Transformation zur Analyse von Signalen bedeutet (4.3.1), dass lange Pfade vernachlässigt werden können. Mit (4.3.2) ist ein Maß gegeben, bis zu welcher Ordnung die Transformation durchgeführt werden sollte, das heißt, was die maximale zu berücksichtigende Pfadlänge ist. Denkbar wäre, nur eine Pfadmenge Ω zu betrachten, so dass:

$$\|S_J[\Omega]f\| \geq 0.95 \|f\|_2.$$

Nun zu den Eigenschaften, die ursprünglich gewünscht waren: Translationsinvarianz und Stabilität unter Verformungen. Bezüglich der Translationsinvarianz zeigt Mallat, dass die Windowed-Scatter-Transformation S_J für $J \rightarrow \infty$ im Grenzwert translationsinvariant ist.

Satz 4.3.3. Für zulässige Scattering-Wavelets und $f \in L^2(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|S_J[P_J]f - S_J[P_J]L_c f\| = 0. \quad (4.3.3)$$

Auch dies wurde in Kapitel 4.1 bereits motiviert. Der Operator $U[p]$ vertauscht mit Translationen. Die Windowed-Scatter-Koeffizienten $S_J[p]f$ sind gegeben durch $U[p]f * \phi_J$. Wird J größer bedeutet dies, dass das Zeitfenster von ϕ_J breiter, und die Faltung mit ϕ_J somit ähnlicher zu Integration wird.

Veranschaulicht wird der Einfluss von J auf die Translationsinvarianz der Windowed-Scatter-Transformation in Kapitel 8.1 an einem künstlichen Signal.

Für die Aussagen zur Stabilität unter Verformungen gebraucht Mallat einen weiteren Normbegriff. Er definiert

$$\|U[P_J]f\|_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|$$

und behauptet, dass dies für eine große Klasse von Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ endlich ist. Für welche genau dies gilt, untersucht er jedoch nicht. Dieser Normbegriff erlaubt folgende Aussagen zur Stabilität unter Verformungen:

Satz 4.3.4. Es existiert ein C , so dass für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\|U[P_J]f\|_1 < \infty$ und alle $\tau \in C^2(\mathbb{R})$ mit $\|\nabla\tau\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}$ gilt, dass:

$$\|S_J[P_J]L_{\tau}f - S_J[P_J]f\| \leq C \|U[P_J]f\|_1 K(\tau)$$

wobei

$$K(\tau) = 2^{-J} \|\tau\|_{\infty} + \|\nabla\tau\|_{\infty} \max\left(\log \frac{\|\Delta\tau\|_{\infty}}{\|\nabla\tau\|_{\infty}}, 1\right) + \|H\tau\|_{\infty}.$$

Wird für $m \geq 1$ nur die Menge $P_{J,m} \subset P_J$ der Pfade kürzer als m betrachtet, so kann der Ausdruck $\|U[P_J]f\|_1$ ersetzt werden durch $m \|f\|_2$:

$$\|S_J[P_{J,m}]L_{\tau}f - S_J[P_{J,m}]f\| \leq Cm \|f\|_2 K(\tau).$$

Für Funktionen f mit kompaktem Träger kann ein anderes K verwendet werden, das nicht mehr von Translationen τ abhängt:

Satz 4.3.5. Für jede kompakte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ existiert ein C , so dass für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit Träger in Ω und $\|U[P_J]f\|_1 < \infty$ und für alle $\tau \in C^2(\mathbb{R})$ mit $\|\nabla\tau\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}$ gilt, dass

falls $2^J \geq \|\tau\|_\infty / \|\nabla\tau\|_\infty$, dann:

$$\|S_J[P_J]L_\tau f - S_J[P_J]f\| \leq C \|U[P_J]f\|_1 (\|\nabla\tau\|_\infty + \|H\tau\|_\infty).$$

Wenn nur Pfade aus $P_{J,m}$ betrachtet werden, kann $\|U[P_J]f\|_1$, wie in Satz 4.3.4, durch $m \|f\|_2$ ersetzt werden.

Dass in der Definition von K in Satz (4.3.4) $2^{-J} \|\tau\|_\infty$ steht und in Satz (4.3.5) die Bedingung $2^J \geq \|\tau\|_\infty / \|\nabla\tau\|_\infty$ gestellt wird, hängt mit dem bereits in Kapitel 4.1 motivierten und formal in Satz (4.3.3) gesehenen Einfluss der Fensterbreite von ϕ_J auf die Translationsinvarianz der Transformation zusammen. Die Hauptarbeit beim Beweis von Satz (4.3.4) ist, zu zeigen, dass die Wavelet-Transformation stabil unter dem Verformungsoperator L_τ ist. Satz (4.3.5) ist ein Korollar aus (4.3.4). Zuerst wird im Beweis von der Abschätzung aus (4.3.4) ausgegangen. Dann kann der Term $2^{-J} \|\tau\|$ wegen der Bedingung $2^J \geq \|\tau\|_\infty / \|\nabla\tau\|_\infty$ durch $\|\nabla\tau\|_\infty$ abgeschätzt werden. Der Ausdruck $\|\Delta\tau\|_\infty$ kann mit der Überlegung abgeschätzt werden, dass τ , da f einen Träger in Ω hat, auf der Menge $\tau^{-1}(\Omega)^C$ anders C^2 -fortgesetzt werden kann. Mallat findet eine Fortsetzung $\tilde{\tau}$ mit $\tilde{\tau} = \tau$ auf $\tau^{-1}(\Omega)^C$ und $\tilde{\tau}(\tau^{-1}(\Omega)^C) \subset \Omega^C$ mit $\|\Delta\tilde{\tau}\|_\infty \leq (4R + 2) \|\nabla\tilde{\tau}\|_\infty$, wobei $R = \max_{x,y \in \Omega} |x - y|$. Daraus ergibt sich die Abschätzung aus Satz (4.3.5).

Entgegen Mallats Aussage in [6] bieten diese beiden Sätze keine direkte Aussage über den Abstand der Windowed-Scatter-Transformation eines verformten Signals $L_\tau f$ von der Windowed-Scatter-Transformation des Originalsignals f für eine „einfache“ Verformung $\tau(t) = st$ (vgl. Kapitel 3.1 zur Fourier-Transformation), da in diesem Fall $\|\tau\|_\infty = \infty$. Wird J ausreichend groß gewählt, ist die Transformation in der Praxis jedoch auch unter solchen Verformungen stabil.

Kapitel 8.1 veranschaulicht den in den Sätzen (4.3.4) und (4.3.5) gesehenen Einfluss der Länge des Zeitfensters von ϕ_J auf die Stabilität der Transformation am Beispiel eines künstlichen Signals.

5. Konvergenz der Windowed-Scatter-Transformation S_J gegen die Scatter-Transformation \bar{S}

Ziel dieses Kapitels ist es, zum einen die Scatter-Transformation als Limes der Windowed-Scatter-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ -Funktionen zu erweitern. Zum anderen ist das Ziel, die in Kapitel 4.3 für die Windowed-Scatter-Transformation gesehenen Eigenschaften auf die Scatter-Transformation zu übertragen. Damit wäre diese normerhaltend, stabil unter Verformungen und zusätzlich translationsinvariant. Der punktweise Limes der Windowed-Scatter-Transformation in der Pfadvariablen muss jedoch nicht existieren. Ähnlich wie bei der Erweiterung der Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ -Funktionen [7] betrachtet Mallat daher eine „globalere“ Konvergenz der Windowed-Scatter-Transformation in $L^2(\bar{P}_\infty, d\mu)$ gegen eine nicht punktweise definierte Funktion auf \bar{P}_∞ , der Erweiterung der Scatter-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$. Kapitel 5.1 stellt kurz dar, wie Mallat den Raum $(\bar{P}_\infty, d\mu)$ konstruiert. Kapitel 5.2 behandelt die Konvergenz der Windowed-Scatter-Transformation und die Erweiterung der Scatter-Transformation. Dabei orientieren wir uns an der Darstellung von Mallat in [6].

5.1. Der Raum $(\bar{P}_\infty, d\mu)$

Soll nicht nur der punktweise Limes der Windowed-Scatter-Transformation betrachtet werden, sondern eine „globalere“ Konvergenz, muss zunächst betrachtet werden, wie sich die Pfadmengen P_J für $J \rightarrow \infty$ verhalten: Jeder Pfad $p \in P_J$ kann in P_{J+1} in eine unendliche Menge von Pfaden erweitert werden. Für $J \rightarrow \infty$ konvergieren diese Erweiterungen gegen unendlich lange Pfade einer nicht abzählbaren Menge \bar{P}_∞ . Bezeichnet Λ^m die Menge aller Pfade $p \in P_\infty$ der Länge m und Λ^∞ die Menge aller Pfade unendlicher Länge, lässt sich \bar{P}_∞ schreiben als

$$\bar{P}_\infty = \Lambda^\infty \cup \bigcup_{m=0}^{\infty} \Lambda^m \quad (5.1.1)$$

Der nächste Schritt ist, eine σ -Algebra auf \bar{P}_∞ und ein Maß μ auf dieser zu definieren. Dazu betrachtet Mallat für alle endlichen Pfade $p = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in P_\infty = \bigcup_{m=0}^{\infty} \Lambda^m$ die Zylindermengen

$$C(p) = \{q \in \Lambda^\infty : q_1 = \lambda_1, \dots, q_n = \lambda_n\} \cup \{p\} \subset \bar{P}_\infty$$

und die Zylindermengen der Frequenzauflösung J , definiert für alle $p \in P_J$ durch:

$$C_J(p) = \bigcup_{\lambda \leq 2^{-J} \in \Lambda} C(p + \lambda) \subset C(p).$$

Die Mengen $C_J(p)$ enthalten in gewisser Weise alle Pfade $q \in \bar{P}_\infty - P_J$, die p verfeinern. $\bigcup_{p \in P_J} C_J(p)$ ist für alle J eine disjunkte Zerlegung von \bar{P}_∞ . Da $P_{J+1} \subset P_J$ gilt offensichtlich $C_{J+1}(p) \subset C_J(p)$.

Da Λ abzählbar ist, erzeugen die Mengen $C(p)$ und $C_J(p)$ für $p \in P_\infty$ dieselbe σ -Algebra auf \bar{P}_∞ . Als nächstes definiert Mallat ein Maß auf dieser σ -Algebra über das Scattering einer Dirac-Funktion:

$$U[p]\delta = |||\psi_{\lambda_1}| * \psi_{\lambda_2} | * \dots | * \psi_{\lambda_m}|$$

In [6], S. 1353, zeigt er folgende Aussage:

Satz 5.1.1. *Es existiert ein eindeutiges σ -endliches Borelmaß μ auf der durch die $C(p)$ erzeugten σ -Algebra, genannt Dirac Scattering Maß, so dass*

$$\mu(C(p)) = \|U[p]\delta\|_2^2 \quad (5.1.2)$$

für alle $p \in P_\infty$ gilt und für alle $2^j \in \Lambda$ und $p \in P_\infty$:

$$\mu(C(2^j p)) = 2^j \mu(C(p)). \quad (5.1.3)$$

Falls außerdem $|\hat{\psi}(\omega)| + |\hat{\psi}(-\omega)| \neq 0$ fast überall, so gilt:

$$\|U[p]\delta\|_2 \neq 0 \quad (5.1.4)$$

für alle $p \in P_\infty$.

(5.1.2) mit (5.1.4) bedeutet, dass kein Zylinder Maß 0 hat.

Die Definition des Maßes der Zylinder über (5.1.2) lässt folgende Aussage über das Maß der Zylindermengen $C_J(p)$ zu:

Satz 5.1.2 (Maß von Zylindermengen der Auflösung J). *Für einen Pfad $p \in P_\infty$ der Länge m gilt:*

$$\mu(C_J(p)) = \|S_J \delta[p]\|_2^2 \leq 2^{-J} \|\phi\|_2^2 \|\psi\|_1^{2m}.$$

Während es üblich ist, zur Konstruktion einer σ -Algebra auf einer unendlichen Produktmenge diskreter Mengen Zylindermengen zu nutzen [19], ist Mallats Motivation zur

Definition des Maßes über (5.1.2) und die Interpretation der Normalisierung mit diesem in der Scatter-Transformation aus Definition 4.2.2 auch mit Satz (5.1.2) erst einmal nicht ganz klar. Tatsächlich spielt es keine große Rolle, welches Maß genau gewählt wird. Wichtig für das weitere Vorgehen in Kapitel 5.2 ist lediglich, dass das Maß der Zylinder $C_J(p)$ ungleich null ist. Dies gilt, da $C(p + 2^{-J}) \subset C_J(p)$ und nach Satz (5.1.1) $\mu(C(p + 2^{-J})) \neq 0$. In Kapitel 5.2 werden wir genauer sehen, wieso die Wahl des Maßes nicht entscheidend ist.

5.2. Scatter-Transformation auf \bar{P}_∞ .

Nun da der Raum $(\bar{P}_\infty, d\mu)$ konstruiert ist, ist der nächste Schritt, die Windowed-Scatter-Transformation auf diesen zu erweitern, ohne dass die Eigenschaften aus Kapitel 3.3 verloren gehen. Danach werden wir in diesem Raum die Konvergenz der erweiterten Windowed-Scatter-Transformation gegen die Scatter-Transformation untersuchen.

Definition 5.2.1 (Windowed-Scatter-Transformation auf $(\bar{P}_\infty, d\mu) \times \mathbb{R}$). *Die Erweiterung der Windowed-Scatter-Transformation von $P_J \times \mathbb{R}$ auf $(\bar{P}_\infty, d\mu) \times \mathbb{R}$ wird definiert als:*

$$S_J f(q, t) = \sum_{p \in P_J} \frac{S_J[p]f(t)}{\|S_J[p]\delta\|_2} \mathbb{1}_{C_J(p)}(q), \quad (5.2.1)$$

wobei $\mathbb{1}_{C_J(p)}$ die Indikatorfunktion der Zylindermenge $C_J(p)$ in \bar{P}_∞ ist.

Mallat setzt wegen Satz (5.1.1) $|\hat{\psi}(\omega)| + |\hat{\psi}(-\omega)| \neq 0$ fast überall voraus, womit mit der Überlegung am Ende von Kapitel 5.1 $\|S_J[p]\delta\|_2 \neq 0$ folgt. Für $q \in P_J$ stimmt diese Definition bis auf den Normalisierungsfaktor $\frac{1}{\|S_J[q]\delta\|_2}$ mit der Definition aus 4.2.3 überein, da das einzige $p \in P_J$ für das $\mathbb{1}_{C_J(p)}(q) \neq 0$ gilt, q ist. Es ergibt sich:

$$S_J f(q, t) = \frac{S_J[q]f(t)}{\|S_J[q]\delta\|_2} \quad (5.2.2)$$

für alle $q \in P_J$. Der Normalisierungsfaktor ist nötig, um die in Kapitel 4.3 gezeigten Eigenschaften der Windowed-Scatter-Transformation auf $P_J \times \mathbb{R}$ bezüglich der Norm $\|S_J[P_J]f\|_{P_J \times \mathbb{R}} = \sum_{p \in P_J} \|S_J[p]f\|_2$ auf den Raum $(\bar{P}_\infty, d\mu) \times \mathbb{R}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{\bar{P}_\infty \times \mathbb{R}}$, definiert durch

$$\|S_J f\|_{\bar{P}_\infty \times \mathbb{R}}^2 = \int_{\bar{P}_\infty} \int_{\mathbb{R}} |S_J f(p, t)|^2 dt d\mu(p),$$

zu übertragen.

Tatsächlich gilt wegen $\mu(C_J(p)) = \|S_J[p]\delta\|_2^2$ für alle $f, h \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \|S_J f - S_J h\|_{\bar{P}_\infty \times \mathbb{R}} &= \|S_J[P_J]f - S_J[P_J]h\|_{P_J \times \mathbb{R}} \quad \text{und} \\ \|S_J f\|_{\bar{P}_\infty \times \mathbb{R}} &= \|S_J[P_J]f\|_{P_J \times \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Die Aussagen zur Kontraktivität, Normerhaltung und Stabilität unter Verformungen aus Kapitel 4.3 gelten daher auch für die Erweiterung der Windowed-Scatter-Transformation bezüglich der $\|\cdot\|_{\bar{P}_\infty \times \mathbb{R}}$ -Norm.

An dieser Stelle wird die Bedeutung der Zylindermengen der Auflösung J klar. Diese werden benötigt, um die Windowed-Scatter-Transformation auf den Raum $\bar{P}_\infty \times \mathbb{R}$ zu erweitern. Außerdem wird klar, wieso die genaue Wahl des Maßes μ nicht entscheidend ist: Es hätte auch ein anderes Maß $\tilde{\mu}$ mit $\tilde{\mu}(C_J(p)) \neq 0$ für alle $J \in \mathbb{Z}$, $p \in P_\infty$ gewählt werden können. Lediglich die Normalisierungsfaktoren in der Erweiterung der Windowed-Scatter-Transformation 5.2.1 und in der Definition der Scatter-Transformation für $L^1(\mathbb{R})$ -Funktionen 4.2.2 wären dadurch andere gewesen. Da in den Aussagen dieses Kapitels stets die Norm $\|\cdot\|_{\bar{P}_\infty \times \mathbb{R}}$ beziehungsweise $\|\cdot\|_{\bar{P}_\infty} = \|\cdot\|_{L^2(\bar{P}_\infty, d\mu)}$ verwendet wird, kürzen sich die Normalisierungskoeffizienten sowieso stets mit dem Maß heraus.

Der Unterschied zwischen der Windowed-Scatter-Transformation und der Scatter-Transformation ist, dass bei ersterer mit der Fensterfunktion ϕ_J gefaltet und somit nur lokal integriert wird. Deshalb hängt $S_J f$ neben einer Pfadvariablen p auch von einer Zeitvariablen t ab. Für $J \rightarrow \infty$ wird die Fensterfunktion ϕ_J jedoch immer breiter. Die Abhängigkeit der Koeffizienten vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ nimmt ab. Um die Konvergenz von $S_J f(q, t)$ gegen eine nur von q abhängige Funktion zu untersuchen, entfernt Mallat den Einfluss von t durch Integration von $|S_J f(q, t)|^2$ über t für festes q . Er definiert:

$$\bar{S}_J f(q) = \int_{\mathbb{R}} |S_J f(q, t)|^2 dt$$

und behauptet:

$$\int_{\mathbb{R}} |S_J f(q, t)|^2 dt = \sum_{p \in P_J} \frac{\|S_J[p]f\|_2}{\|S_J[p]\delta\|_2} \mathbb{1}_{C_J(p)}(q). \quad (5.2.3)$$

Dies ist jedoch nicht korrekt. Die Definition für $\bar{S}_J f(q)$ sollte über die $L^2(\mathbb{R})$ -Norm definiert sein, nicht über ihr Quadrat. Damit gilt die Gleichheit

$$\bar{S}_J f(q) = \sum_{p \in P_J} \frac{\|S_J[p]f\|_2}{\|S_J[p]\delta\|_2} \mathbb{1}_{C_J(p)}(q),$$

die von Mallat in den folgenden Beweisen zu Aussagen über $\bar{S}_J f$ genutzt wird. Dass die

Gleichheit so gilt, kann mit der Definition von $S_J f$ aus Definition 5.2.1 wie folgt gesehen werden:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |S_J f(q, t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{p \in P_J} \frac{S_J[p]f(t)}{\|S_J[p]\delta\|_2} \mathbb{1}_{C_J(p)}(q) \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da die Mengen $C_J(p)$ und $C_J(q)$ für $p \neq q \in P_J$ disjunkt sind, gilt:

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{p \in P_J} \frac{|S_J[p]f(t)|^2}{\|S_J[p]\delta\|_2^2} \mathbb{1}_{C_J(p)}(q) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da alle Summanden positiv sind, können das Integral und die Summe vertauscht werden:

$$= \left(\sum_{p \in P_J} \int_{\mathbb{R}} \frac{|S_J[p]f(t)|^2}{\|S_J[p]\delta\|_2^2} dt \mathbb{1}_{C_J(p)}(q) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wiederum mit der Disjunktheit der C_J ergibt sich die Aussage:

$$= \sum_{p \in P_J} \frac{\|S_J[p]f\|_2}{\|S_J[p]\delta\|_2} \mathbb{1}_{C_J(p)}(q).$$

Mit der Definition

$$\bar{S}_J f(q) = \left(\int_{\mathbb{R}} |S_J f(q, t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

lässt sich folgende Aussage zeigen:

Satz 5.2.2. Für alle $f, h \in L^2(\mathbb{R})$ und $J \in \mathbb{Z}$ gelten:

$$\left\| \bar{S}_J f - \bar{S}_J h \right\|_{\bar{P}_\infty} \leq \|S_J[P_J]f - S_J[P_J]h\|_{P_J \times \mathbb{R}} \leq \|f - h\|_2 \quad (5.2.4)$$

und

$$\left\| \bar{S}_J f \right\|_{\bar{P}_\infty} = \|f\|_2, \quad (5.2.5)$$

wobei $\|h\|_{\bar{P}_\infty} = \left(\int_{\bar{P}_\infty} |h|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$.

Mit (5.2.4) lassen sich die Stabilität aus Satz (4.3.4) und die Translationsinvarianz der Limes-Metrik aus Satz (4.3.3) der Windowed-Scatter-Transformation von $S_J[P_J]$ auf \bar{S}_J übertragen. (5.2.5) sagt aus, dass auch die Transformation \bar{S}_J die Norm erhält.

Nun kann die Scatter-Transformation für $f \in L^2(\mathbb{R})$ definiert werden:

Definition 5.2.3 (Scatter-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$). Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ und $q \in \bar{P}_\infty$ ist die Scatter-Transformation definiert durch:

$$\bar{S}f(q) = \liminf_{J \rightarrow \infty} \bar{S}_J f(q). \quad (5.2.6)$$

Wie bereits zu Beginn von Kapitel 5 erwartet, ist $\bar{S}f$ nicht notwendigerweise punktweise wohldefiniert, jedoch gilt mit (5.2.5) und Fatous Lemma, dass $\bar{S}f$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\bar{P}_\infty, d\mu)$ ist. Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ zeigt Mallat, dass Definition 5.2.6 mit Definition 4.2.2 übereinstimmt und somit eine „sinnvolle“ Erweiterung auf $L^2(\mathbb{R})$ darstellt.

Damit sind alle Bausteine für den Hauptsatz aus [6] erarbeitet.

Satz 5.2.4. Falls für $f \in L^2(\mathbb{R})$ eine Menge $\Omega_J^f \subset P_J$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} \lim_{J \rightarrow \infty} \left\| S_J[\Omega_J^f] f \right\|_{P_J \times \mathbb{R}} &= 0 \quad \text{und} \\ \lim_{J \rightarrow \infty} \sup_{p \in P_J - \Omega_J^f} \left\| \frac{S_J[p]f}{\|S_J[p]f\|_2} - \frac{S_J[p]\delta}{\|S_J[p]\delta\|_2} \right\|_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

dann gilt:

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \left\| \bar{S}_J f - \bar{S}f \right\|_{\bar{P}_\infty} = 0 \quad \text{wobei} \quad \left\| \bar{S}f \right\|_{\bar{P}_\infty} = \|f\|_2 \quad (5.2.8)$$

und

$$\int_{C(p)} \left| \bar{S}f(q) \right|^2 d\mu(q) = \|U[p]f\|_2^2 \quad \text{für alle } p \in P_\infty. \quad (5.2.9)$$

Sind die Bedingungen auf einer dichten Untermenge von $L^2(\mathbb{R})$ erfüllt, so konvergiert $\bar{S}_J f$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ stark gegen $\bar{S}f$ und (5.2.8) und (5.2.9) gelten auf $L^2(\mathbb{R})$.

Starke Konvergenz bezeichnet Eigenschaft 5.2.8.

Auf den ersten Blick mag es erscheinen, als besagten die Bedingungen, dass die Windowed-Scatter-Transformation eines Signals f für μ -fast-alle $p \in \bar{P}_\infty$ gegen die Windowed-Scatter-Transformation einer Dirac-Funktion δ konvergiert. Das würde es natürlich uninteressant machen, den Limes der Windowed-Scatter-Transformation zu betrachten. Die Bedingung besagt jedoch etwas anderes und es ist plausibel, dass sie erfüllt ist. Dazu folgende Überlegung:

Für größeres J hängt $S_J[p]g(t)$ immer weniger von t ab, da das Fenster ϕ_J , mit dem gefaltet wird, immer breiter wird. $S_J[p]g(t)$ nähert sich für $J \rightarrow \infty$ somit immer weiter

einer konstanten Funktion an. Die Information welcher Konstanten sich $S_J[p]g$ annähert, wird in (5.2.7) jedoch gewissermaßen heraus dividiert.

Mallat vermutet, dass die Bedingung tatsächlich für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$ erfüllt ist. Für diese gilt laut Mallat mit dem Satz von Plancharel und $S_J[p]f(t) = U[p]f * \phi_J(t)$ zumindest

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \left\| \frac{S_J[p]f}{\|S_J[p]f\|_2} - \frac{S_J[p]\delta}{\|S_J[p]\delta\|_2} \right\|_2 = 0$$

für alle $p \in P_\infty$. Ich sehe jedoch nicht, dass dies gilt. Darüber hinaus würde dies nicht zeigen, dass tatsächlich Bedingung (5.2.7) für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$ erfüllt ist, da bei dieser nicht der Limes des Terms für ein festes $p \in P_\infty$ betrachtet wird, sondern der Limes eines Supremums. Nichtsdestotrotz würde es Mallats Vermutung noch etwas plausibler machen. Um seine Vermutung zu begründen, weist Mallat ansonsten nur auf „numerische Experimente“ hin, auf die er jedoch nicht genauer eingeht.

Angenommen, die Vermutung gilt, würde mit Satz (5.2.4), da $L^1(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt, folgen, dass

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \left\| \bar{S}_J f - \bar{S} f \right\|_{\bar{P}_\infty} = 0 \quad (5.2.10)$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt. Zusammen mit Satz (5.2.2) und

$$\left\| \bar{S} f - \bar{S} g \right\|_{\bar{P}_\infty} \leq \left\| \bar{S} f - \bar{S}_J f \right\|_{\bar{P}_\infty} + \left\| \bar{S}_J f - \bar{S}_J g \right\|_{\bar{P}_\infty} + \left\| \bar{S}_J g - \bar{S} g \right\|_{\bar{P}_\infty}$$

ergäbe sich damit, dass die Scatter-Transformation eine normerhaltende und translationsinvariante Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ ist, die stabil unter Verformungen im Sinne von 1.0.2 ist.

5.3. Vergleich mit der Fourier-Transformation

Die Scatter-Transformation hat große Ähnlichkeit mit der Fourier-Transformation. Während die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ abhängig von $\omega \in \mathbb{R}$ ist, ist die Scatter-Transformierte $\bar{S}f(q)$ abhängig von einer Pfadvariablen $q \in \bar{P}_\infty$. Um die Scatter-Transformierte darstellen und besser mit der Fourier-Transformation vergleichen zu können, konstruiert Mallat eine Abbildung von $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ nach \bar{P}_∞ , die das Lebesgue-Maß und das Dirac-Scatter-Maß auf folgende Weise verbindet:

Satz 5.3.1. *Gilt $|\hat{\psi}(\omega)| + |\hat{\psi}(\omega)| \neq 0$ fast überall, so existiert eine surjektive Funktion $q(\omega)$ von \mathbb{R}^+ nach \bar{P}_∞ , so dass für alle messbaren Mengen $\Omega \subset \bar{P}_\infty$ gilt:*

$$\mu(\Omega) = \mathcal{L}(q^{-1}(\Omega)).$$

Wobei \mathcal{L} das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R} sei.

Da die σ -Algebra der μ -messbaren Mengen auf \bar{P}_∞ durch die Zylindermengen erzeugt wird, genügt es für die Konstruktion von q , diese zu betrachten. Zuerst werden die Zylinder $C(p)$ für Pfade $p = \lambda = 2^j$ der Länge 1 betrachtet. Mit Satz (5.1.1) und Substitution gilt $\mu(C(2^j)) = 2^j \|\psi\|_2^2$. Es wird $q^{-1}(C(2^j)) = [2^j \|\psi\|_2^2, 2^{j+1} \|\psi\|_2^2)$ gewählt. Somit gilt $\mu(C(2^j)) = \mathcal{L}(q^{-1}(C(2^j)))$ und die Mengen $q^{-1}(C(2^j))$ bilden eine disjunkte Zerlegung von \mathbb{R}^+ . Die Mengen $C(p)$ können geschrieben werden als

$$C(p) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C(p + \lambda).$$

Wegen der σ -Additivität von Maßen gilt $\mu(C(p)) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mu(C(p + 2^j))$. Somit können alle $q^{-1}(C(p + 2^j))$ in das Intervall $q^{-1}(C(p))$ eingebettet werden. Das Vorgehen dabei ist analog zu dem beschriebenen Vorgehen bei der Einbettung der Pfade der Länge 1 in \mathbb{R}^+ .

Satz (5.3.1) impliziert, dass:

$$\begin{aligned} \left\| \bar{S}f(q(\omega)) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^+} \left| \bar{S}f(q(\omega)) \right|^2 d\omega \\ &= \int_{\bar{P}_\infty} \left| \bar{S}f(q) \right|^2 d\mu(q) = \left\| \bar{S}f \right\|_{\bar{P}_\infty}^2. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die so erhaltende Funktion $\bar{S}f(q(\omega)): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ in $L^2(\mathbb{R}^+)$ enthalten ist. Außerdem ist an $\bar{S}f(q(\omega))$ nun die Ähnlichkeit der Scatter-Transformation und der Fourier-Transformation ersichtlich. Falls Bedingung (5.2.7) aus Satz (5.2.4) für $f \in L^2(\mathbb{R})$ erfüllt ist, gilt mit (5.2.8), dass:

$$\left\| \bar{S}f(q(\omega)) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 = \left\| \bar{S}f \right\|_{\bar{P}_\infty}^2 = \left\| \hat{f} \right\|_2^2$$

und mit (5.2.9), $U[\lambda]f = |f * \psi_\lambda|$ und dem Satz von Plancharel, dass:

$$\int_{q^{-1}(C(\lambda))} \left| \bar{S}f(q(\omega)) \right|^2 d\omega = \|U[\lambda]f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{f}(\omega) \right|^2 \left| \hat{\psi}(\lambda^{-1}\omega) \right|^2 d\omega.$$

Da die $\psi(\lambda^{-1}\omega)$ Bandpässe sind, die nur Frequenzen aus größtenteils disjunkten Intervallen $I_\lambda = [\lambda - \frac{B}{2}, \lambda + \frac{B}{2}]$ mit Länge B proportional zu $\lambda = 2^j$ durchlassen, bedeutet ersteres dass die Funktionen $\bar{S}f(q(\omega))$ und $\hat{f}(\omega)$ insgesamt die gleiche Energie haben und letzteres, dass sie diese auch gleich auf die dyadischen Intervalle I_λ beziehungsweise $q^{-1}(C(2^j)) = [2^j \|\psi\|_2^2, 2^{j+1} \|\psi\|_2^2)$ aufteilen. Falls Mallat mit seiner Vermutung recht hat, gilt dies für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Abbildung 5.3.4 ist eine Reproduktion von Abbildung 3.2 aus [6] und illustriert die Ähnlichkeiten der Transformationen, zeigt jedoch auch die Unterschiede. Betrachtet werden vier Funktionen f_i , $i = 1, \dots, 4$. Für $f_1 = \mathbb{1}_{[0,1]}$ zeigt die erste Reihe, dass die Scatter-Transformation und die Fourier-Transformation, resultierend aus der erwähnten gleichen Energieaufteilung auf dyadische Intervalle, gleich schnell abfallen. Die zweite Reihe zeigt eine Gauß-Funktion $f_2(t) = e^{i\xi t} e^{-t^2/2}$ und die dritte Reihe $f_3(t) = f_2(0.9t)$ (vgl. Abb. 3.1.1). Während die Kurven der Fourier-Transformierten von f_2 und f_3 kaum überlappen, liegen die der Scatter-Transformierten fast vollständig übereinander. Dies illustriert die Stabilität unter Verformungen, die die Scatter-Transformation auch für hochfrequente Signale bietet. Die vierte Reihe zeigt mit $f_4(t)$ die Summe zweier Gauß-Funktionen mit verschiedener Mittenfrequenz. Auf Grund der schlechten Frequenzauflösung der Wavelet-Transformation hat auch die Scatter-Transformation erster Ordnung (das heißt nur Pfade der Länge 1 werden genutzt) eine schlechte Frequenzauflösung. Die Pfade der Länge zwei enthalten jedoch Informationen über die Interferenzen in f_4 . Daher unterscheidet sich $\bar{S}f_4$ stark von $\bar{S}f_3$. Die Scatter-Transformation verliert weder die Information darüber, dass f_4 die Summe zweier Gauß-Funktionen ist, noch die Information um welchen Gauß-Funktionen es sich handelt.

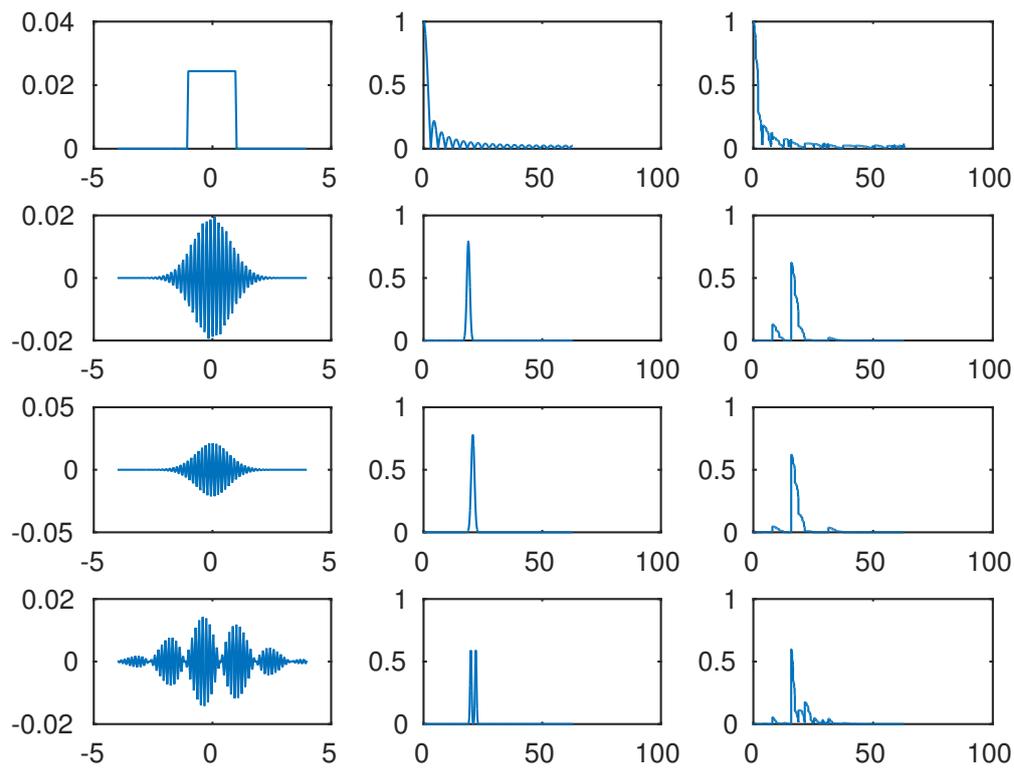


Abbildung 5.3.4: Vergleich der Fourier-Transformation und der Scatter-Transformation für vier Signale f_1 bis f_4 . In der linken Spalte die Darstellung der Signale in der Zeitdomäne, in der mittleren Spalte die Fourier-Transformierten der Signale und in der rechten Spalte die Scatter-Transformierten.

6. Erweiterungen der Scatter-Transformation

Der hohe Informationsgehalt der Scatter-Transformierten wird ebenfalls ersichtlich, wenn sie auf stationäre Prozesse erweitert wird. So hängt sie im Gegensatz zum (Fourier-)Leistungsdichtespektrum nicht nur von Momenten zweiter Ordnung, sondern von beliebig hohen Momenten der Prozesse ab. Auf die Erweiterung der Scatter-Transformation auf stationäre Prozesse, ebenfalls von Mallat in [6] beschrieben, werden wir in Kapitel 6.1 kurz eingehen. In Kapitel 6.2 gehen wir auf die Idee der Frequenz-Scatter-Transformation ein. Durch diese wird neben der Translationsinvarianz und Stabilität unter Verschiebungen in der Zeitdomäne auch Translationsinvarianz und Stabilität unter Verschiebungen in der Frequenzdomäne erreicht. Dies ist beispielsweise zur Spracherkennung nützlich, da verschiedene Personen gleiche Wörter in verschiedenen Tonlagen aussprechen. Auch für die Analyse von den von uns betrachteten Winddaten könnte dies nützlich sein, um beispielsweise den Einfluss der periodischen Rotation des Windrads auf die Messungen der Biegung der Rotorblätter zu verringern. Im Anhang wird ein Beispiel gezeigt, in dem die Frequenz-Scatter-Transformation zur Analyse von Winddaten weiterhilft. Vorgestellt hat Mallat die Frequenz-Scatter-Transformation in [8] zur Analyse von Audiodaten.

6.1. Scatter-Transformation für stationäre Prozesse

In diesem Kapitel wird die Scatter-Transformation für (stark) stationäre stochastische Prozesse $X(t)_{t \in \mathbb{R}}$ betrachtet. Stark stationär ist dabei wie folgt definiert:

Definition 6.1.1 (Stationäre Prozesse). *Ein stochastischer Prozess $X(t)_{t \in \mathbb{R}}$ heißt (stark) stationär, wenn die Verteilung von $X(t)_{t \in \mathbb{R}}$ für alle $s \in \mathbb{R}$ gleich der Verteilung von $X(s+t)_{t \in \mathbb{R}}$ ist.*

Wenn $X(t)_{t \in \mathbb{R}}$ stationär ist, so ist dies auch $U[p]X(t)_{t \in \mathbb{R}}$, insbesondere hängt der Erwartungswert nicht von t ab. Um die Scatter-Transformation für diese Klasse stochastischer Prozesse zu erweitern, betrachtet Mallat wie in Kapitel 3 zunächst endliche Pfade $p \in P_\infty$. In Definition 4.2.2 ersetzt er lediglich das normalisierte Integral durch den Erwartungswert.

Definition 6.1.2 (Erwartete Scatter-Transformation). *Für einen stationären Prozess $X(t)_{t \in \mathbb{R}}$ und einen Pfad $p = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in P_\infty$ wird die erwartete Scatter-Transformation definiert durch:*

$$\bar{S}X(p) = E(U[p]X) = E(|X * \psi_{\lambda_1} | * \dots | * \psi_{\lambda_m} |).$$

Folgende Überlegung zeigt, dass diese Koeffizienten auch von beliebig hohen Momenten $E(X^m)$ abhängen:

$$\begin{aligned} \mathbb{U}[p + \lambda]X(t) &= |\mathbb{U}[p]X(t) * \psi_\lambda| \\ &= \left| \sqrt{|\mathbb{U}[p]X(t)|^2} * \psi_\lambda \right|. \end{aligned}$$

Wird $|\mathbb{U}[p]X(t)|^2 = E(|\mathbb{U}[p]X|^2)(1 + \epsilon(t))$ geschrieben, ergibt sich weiter:

$$= \left| E(|\mathbb{U}[p]X|^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \epsilon(t)} * \psi_\lambda \right|.$$

Wenn angenommen wird, dass $|\epsilon(t)| \ll 1$ ist, gilt $\sqrt{1 + \epsilon(t)} \approx 1 + \epsilon(t)/2$ und es ergibt sich:

$$\approx \left| E(|\mathbb{U}[p]X|^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\epsilon(t)}{2}\right) * \psi_\lambda \right|.$$

Da $\int_{\mathbb{R}} \psi_\lambda(s) ds = 0$ fällt der erste Summand weg und obiges ist gleich:

$$\begin{aligned} &= \left| E(|\mathbb{U}[p]X|^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\epsilon(t)}{2} * \psi_\lambda \right| \\ &= \frac{\left| E(|\mathbb{U}[p]X|^2) \epsilon(t) * \psi_\lambda \right|}{2E(|\mathbb{U}[p]X|^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Wird der erste Summand wieder hinzugefügt und erneut $|\mathbb{U}[p]X(t)|^2 = E(|\mathbb{U}[p]X|^2)(1 + \epsilon(t))$ genutzt, ergibt sich:

$$\mathbb{U}[p + \lambda]X(t) = \frac{\left| |\mathbb{U}[p]X|^2 * \psi_\lambda \right|}{2E(|\mathbb{U}[p]X|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wird dies sukzessive bis $\mathbb{U}[\emptyset]X = X$ durchgeführt, ergibt sich, dass $\bar{S}X(p) = E(\mathbb{U}[p]X)$ für $p = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ von Momenten von X der Ordnung 2^m abhängt.

Analog zum Vorgehen in Kapitel 5 erweitert Mallat die Scatter-Transformation über eine Windowed-Scatter-Transformation auf \bar{P}_∞ . Ähnlich wie in Definition 5.2.1 definiert er eine stückweise konstante Funktion von \bar{P}_∞ nach \mathbb{R} als:

$$\mathbb{Q}_J X(q) = \sum_{p \in P_J} \bar{S}X(p)^2 \frac{\mathbb{1}_{C_J(p)}(q)}{\|\mathbb{S}_J[p]\delta\|_2}$$

und zeigt, dass diese schwach-* gegen ein Maß auf \bar{P}_∞ mit Träger in P_∞ konvergiert:

Definition 6.1.3 (Scattering Leistungsdichtespektrum). *Das Scattering Leistungsdichtespektrum ist definiert als Limes der Q_J und erfüllt:*

$$QX(q) = \lim_{J \rightarrow \infty} Q_J X(q) = \sum_{p \in P_\infty} \bar{S}X(p)^2 \delta(q - p),$$

wobei $\delta(q - p)$ für alle bezüglich einer von Mallat in [6] definierten Scattering-Metrik stetigen Funktionen f auf \bar{P}_∞ erfüllt, dass $\int_{\bar{P}_\infty} f(q) \delta(p - q) d\mu(q) = f(p)$.

Mit Hilfe der Konstruktion von q aus Kapitel 5.3 schreibt Mallat das Scattering-Leistungsdichtespektrum als Funktion von \mathbb{R}^+ . Die Bezeichnung Scattering-Leistungsdichtespektrum suggeriert die Ähnlichkeit zum (Fourier-)Leistungsdichtespektrum $\hat{R}X(\tau)$, definiert als die Fourier-Transformation der Autokorrelationsfunktion:

$$RX(\tau) = E((X(x) - E(X))(X(x - \tau) - E(X))).$$

Das Leistungsdichtespektrum ist ein gängiges Mittel zur Darstellung und Analyse stationärer Prozesse [20]. Die Ähnlichkeit der beiden Leistungsdichtespektren Q und \hat{R} kann unter einigen Voraussetzungen (siehe [6]) – analog zur in Kapitel 5.3 gesehenen Ähnlichkeit der Scatter-Transformation und der Fourier-Transformation und mit den gleichen Folgerungen – ausgedrückt werden als:

$$\int_{q^{-1}(C(\lambda))} QX(q(\omega)) d\omega = E(|X * \psi_\lambda|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{R}X(\omega) \left| \hat{\psi}(\lambda^{-1}\omega) \right|^2 d\omega.$$

Abbildung 6.1.5, eine Reproduktion von Abbildung 4.2 aus [6], zeigt, dass es jedoch wieder auch Unterschiede zwischen den Darstellung gibt. Oben links ist die Realisierung eines Gauß'schen weißen Rauschens zu sehen, unten links die eines Bernoulli-Prozesses, beide mit Erwartungswert 0 und Varianz 1, beide an 1024 Punkten. Auf Grund der gleichen ersten und zweiten Momente haben beide Prozesse ein identisches, konstantes (Fourier-)Leistungsdichtespektrum. Da die Scatter-Leistungsdichtespektren von beliebig hohen Momenten abhängen, haben sie jedoch verschiedene Scatter-Leistungsdichtespektren $QX_i(q(\omega))$. Auf der rechten Seite sind die $Q_{10}X_i(q)$ abgebildet, die diese approximieren. Rot sind die Scatter-Koeffizienten der Ordnung 1, das heißt die Koeffizienten für Wege der Länge 1, grün die für Wege der Länge 2 und blau und violett für Wege der Länge 3 und 4. Während die Koeffizienten für Wege der Länge 1 für beide Prozesse sehr ähnlich sind, unterscheiden sich die Koeffizienten höherer Ordnung, die von höheren Momenten der Prozesse abhängen, stark.

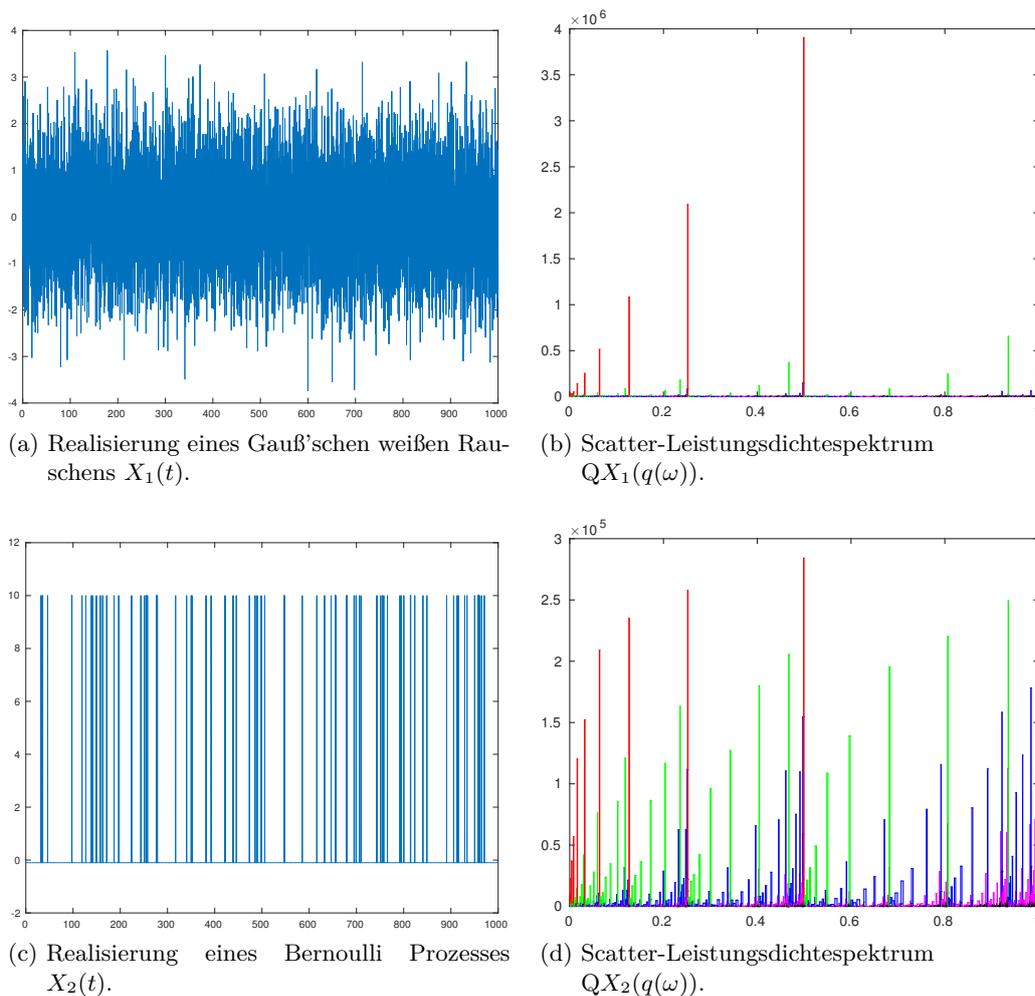


Abbildung 6.1.5: Abhängigkeit des Scatter-Leistungsdichtespektrums von Momenten höherer Ordnung: Auf der linken Seite Realisierungen zweier stationärer Prozesse mit identischen ersten und zweiten Momenten und somit identischem, konstantem (Fourier-)Leistungsdichtespektrum. Rechts die Scatter-Leistungsdichtespektren.

6.2. Frequenz-Scatter-Transformation

In [8] verwendet Mallat die Scatter-Transformation unter anderem zur Bestimmung des Genres von Musikstücken aus der GTZAN-Datenbank [21]. Für diese Aufgabe ist es vorteilhaft, wenn eine Repräsentation des Signals gefunden werden kann, die nicht nur translationsinvariant und stabil unter Verformungen in der Zeitdomäne ist, sondern auch invariant beziehungsweise stabil unter kleinen Verschiebungen und Verformungen in der Frequenzdomäne. Um dies zu erreichen, wird bei der Frequenz-Scatter-Transformation im Anschluss an die gewöhnliche Scatter-Transformation entlang der Zeitvariablen, be-

schrieben in den Kapiteln 4 und 5, eine weitere Scatter-Transformation entlang der ersten Komponente λ_1 der Pfadvariablen $p = \lambda_1, \dots, \lambda_m$ durchgeführt. Dazu werden für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $\lambda_2, \dots, \lambda_m \in \Lambda$ die Abbildungen

$\tilde{S}_{\lambda_2, \dots, \lambda_m}[\mu] = S[p = \mu, \lambda_2, \dots, \lambda_m]f$ von Λ nach \mathbb{R} betrachtet. Diese Abbildungen werden Scatter-transformiert. Die Variable μ ersetzt die Zeitvariable t . Da $\mu = 2^j$ die Mittenfrequenz des ersten Wavelets ist, mit dem das Ausgangssignal f gefaltet wird, gibt μ grob an, welchen Frequenzbereich von f die Scatter-Koeffizienten zu $p = \mu, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ beschreiben. Durch die Scatter-Transformation entlang μ wird deshalb Invarianz unter Frequenzverschiebungen und Stabilität unter Verformungen entlang der log-Frequenzachse erreicht.

7. Implementierung

In diesem Kapitel wird die, von Mallat und seinem Team im Internet² als Matlab Softwarepaket kostenlos zur Verfügung gestellte, Implementierung der Scatter-Transformation untersucht. Im Softwarepaket enthalten sind einige Demonstrationen und eine Dokumentation, die einen Großteil der Möglichkeiten und Optionen, die das Paket bietet, beschreibt. Die Aussagen dieses Kapitels beziehen sich in erster Linie auf die Windowed-Scatter-Transformation. Diese hat in der Praxis zwei Vorteile gegenüber der Scatter-Transformation. Zum einen gehen bei der Integration über die $U[p]$ in der Scatter-Transformation 4.2.2 viele Informationen verloren, die durch die Koeffizienten zu den längeren Pfaden $p+\lambda$ wiedergewonnen werden müssen [8]. Dadurch ist es bei der Scatter-Transformation nötig, Koeffizienten hoher Ordnungen zu berechnen. Dies ist zeitaufwendig. Bei der Windowed-Scatter-Transformation 4.2.3 wird das Integral durch einen Tiefpass, der auch Frequenzen $\neq 0$ passieren lässt, ersetzt. Dadurch reicht es meist aus [8, 6], die Koeffizienten 2. Ordnung zu berechnen. Klassifizierungs- und Clusteralgorithmen liefern häufig bessere Ergebnisse, wenn nicht mit global sondern nur mit lokal translationsinvarianten Darstellungen gearbeitet wird. Auch in Kapitel 8 werden wir bei der Analyse der Winddaten mit der Windowed-Scatter-Transformation arbeiten.

Um die Scatter-Transformation auf Zeitreihen $f \in \mathbb{R}^d$ anzuwenden, ist es notwendig, eine Möglichkeit zu finden, die in Kapitel 3 vorgestellte Wavelet-Transformation für Zeitreihen durchzuführen. Die Wavelet-Transformation setzt sich aus einer Reihe kontinuierlicher Faltungen zusammen. Der erste Schritt ist, die Zeitreihe f als Sample eines kontinuierlichen Signals $f_K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (das Subskript K steht im Folgenden dafür, dass es sich um eine kontinuierliche Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} handelt) zu interpretieren. Dann muss die kontinuierliche Faltung von f_K mit dem kontinuierlichen Filter ψ_K approximiert werden. In Kapitel 7.1 wird zuerst der Algorithmus angegeben, der für die Approximation der Faltung in Mallats Implementierung genutzt wird. Im Anschluss wird eine Interpretation des Algorithmus, basierend auf der Theorie zur diskreten Fourier-Transformation, zur Fourier-Transformation für zeitdiskrete Signale und zur diskreten Faltung [4], gegeben. Es ist eine alternative Interpretation zu der von Mallat selber in [7] auf den Seiten 112 bis 115 gegebenen. Die hier gegebene passt besser zu Mallats Implementierung. Am Ende von Kapitel 7.1 werden kurz die wichtigsten anderen Aspekte behandelt, in denen sich die implementierte Scatter-Transformation von der in 4.2.2 definierten unterscheidet. Die mathematischen Grundlagen der Scatter- und Windowed-Scatter-Transformation für Zeitreihen sollten in zukünftigen Arbeiten noch weiter untersucht werden. Kapitel 7.2

²<http://www.di.ens.fr/data/software/>

geht auf die wichtigsten, in Mallats Implementierung zu wählenden, Parameter ein.

7.1. Diskretisierung der Scatter-Transformation

In Mallats Implementierung kann aus verschiedenen Wavelet-Typen gewählt werden. Zur Verfügung stehen beispielsweise Morlet-Wavelets [8, 22] und Spline-Wavelets [7]. Für beide ist eine explizite Darstellung $\widehat{\psi}_K$ in der Frequenzdomäne bekannt. Der Algorithmus, mit dem Mallat die Faltung der Zeitreihe $f \in \mathbb{R}^d$ mit dem kontinuierlichen Filter ψ_K berechnet, lautet wie folgt:

Algorithmus 1 Filterung einer Zeitreihe mit einem kontinuierlichem Filter in Mallats Implementierung.

Gegeben: Zeitreihe $f \in \mathbb{R}^d$, explizite Darstellung der Fourier-Transformation $\widehat{\psi}_K$ des Filters ψ_K
Ausgabe: Gefilterte Zeitreihe g
 $\psi = \text{zeros}(d)$
4: **for** $k = -1, \dots, 2$ **do**
 for $n = 0, \dots, d - 1$ **do**
 $\tilde{\psi}[n] = \widehat{\psi}_K(\frac{n}{d}2\pi + k2\pi)$
 end for
8: **end for**
 $\tilde{f} = \text{DFT}\{f\}$
 for $n = 0, \dots, d - 1$ **do**
 $\tilde{g}[n] = \tilde{f}[n]\tilde{\psi}[n]$
12: **end for**
 $g = \text{IDFT}\{\tilde{g}\}$
 return g

Mit DFT wird hierbei die diskrete Fourier-Transformation (berechnet mit der Fast-Fourier-Transformation) und mit IDFT die inverse diskrete Fourier-Transformation (berechnet mit der inversen Fast-Fourier-Transformation) bezeichnet. Definiert werden diese in 7.1.1.

Um die Ausgabe g interpretieren zu können, wird ein wenig Theorie zur diskreten Fourier-Transformation (DFT) (7.1.1), zur Fourier-Transformation für zeitdiskrete Signale (DTFT, engl. für Discrete-Time-Fourier-Transform) (7.1.2) und zum Zusammenhang dieser Transformationen mit der Fourier-Transformation kontinuierlicher Signale benötigt. Ausführlicher als im Folgenden wird dieser Zusammenhang in [4, 23] beschrieben.

Die diskrete Fourier-Transformation ist wie folgt definiert:

Definition 7.1.1 (Diskrete Fourier-Transformation). Die diskrete Fourier-Transformation (DFT) einer Zeitreihe $f \in \mathbb{R}^d$ ist definiert als:

$$F[k] = DFT\{f\}[k] = \sum_{n=0}^{d-1} f[n]e^{-i2\pi kn/d}, \quad \text{für } k \in \{0, \dots, d-1\}.$$

Die inverse diskrete Fourier-Transformation (IDFT) ist gegeben durch:

$$f[k] = IDFT\{F\}[k] = \sum_{n=0}^{d-1} F[n]e^{i2\pi kn/d}, \quad \text{für } k \in \{0, \dots, d-1\}.$$

Die DFT ist eine Transformation für endliche Zeitreihen $f \in \mathbb{R}^d$. Die zeitdiskrete Fourier-Transformation ist eine Transformation für diskrete Signalfolgen $f[k]$, $k \in \mathbb{Z}$. Einer solchen ordnet sie ein kontinuierliches 2π -periodisches Spektrum zu:

Definition 7.1.2 (Zeitdiskrete Fourier-Transformation). Für eine Folge $f[k]$, $k \in \mathbb{Z}$ ist die zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT) definiert als:

$$F(\omega) = DTFT\{f\}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]e^{-ik\omega} \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}. \quad (7.1.1)$$

Die inverse zeitdiskrete Fourier-Transformation (IDTFT) ist gegeben durch:

$$f[k] = IDTFT\{F\}[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)e^{ik\omega} d\omega \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}. \quad (7.1.2)$$

Die zeitdiskrete Fourier-Transformierte ist 2π -periodisch. Wird angenommen, dass die Signalfolge $f[k]$, $k \in \mathbb{Z}$ die Sample eines kontinuierlichen Signals $f_K(t)$ mit Samplingrate T sind, das heißt $f[k] = f_K(k/T)$, so hängt die DTFT-Transformation von $f[k]$ über folgende Beziehung mit der Fourier-Transformation von $f_K(t)$ zusammen [4]:

$$DTFT\{f\}(\omega T) = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_K\left(\omega + \frac{2\pi}{T}j\right). \quad (7.1.3)$$

Die For-Schleife in den Zeilen 4 bis 8 von Algorithmus 1 kann daher als Approximation der DTFT der mit Samplingrate 1 aus der kontinuierlichen Darstellung von $\psi_K(t)$ hervorgegangenen Signalfolge $\psi[k] = \psi_K(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, an den Stellen $\frac{n}{d}2\pi$ interpretiert werden:

$$\tilde{\psi}[n] \approx DTFT\{\psi\}\left(\frac{n}{d}2\pi\right). \quad (7.1.4)$$

Als nächstes wird das punktweise Produkt der DFT \tilde{f} der Zeitreihe f mit obiger Ap-

proximation an die Sample der DTFT von ψ berechnet. Dieses wird mit der IDFT zurücktransformiert. Für folgende Rechnung wird angenommen, dass die $\tilde{\psi}[n]$ exakt die DTFT von ψ an der Stelle $\frac{n}{d}2\pi$ darstellen. Die Berechnung des Algorithmus kann umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} g[k] &= \text{IDFT}\{\text{DFT}\{f\}[n]\text{DTFT}\{\psi\}(\frac{n}{d}2\pi)\}[k] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{d-1} \text{DFT}\{f\}[n]\text{DTFT}\{\psi\}(\frac{n}{d}2\pi)e^{i2\pi kn/d} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{d-1} \left(\sum_{m=0}^{d-1} f[m]e^{-i2\pi mn/d} \right) \left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi[h]e^{-i2\pi hn/d} \right) e^{i2\pi kn/d}. \end{aligned}$$

Wir vertauschen die Summen und nutzen

$$\sum_{n=0}^{d-1} e^{i2\pi(k-h-m)n/d} = \begin{cases} N, & \text{falls } k - h - m = pd, \quad p \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

so ergeben sich weiter die Gleichheiten:

$$g[k] = \sum_{m=0}^{d-1} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi[h]f[m] \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{d-1} e^{i2\pi(k-h-m)n/d} = \sum_{m=0}^{d-1} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \psi[k - m - pd]f[m] = f_d * \psi[k],$$

wobei f_d die d-periodische Erweiterung der Zeitreihe $f \in \mathbb{R}^d$ zu einer Signalfolge $f_d[k] = f[k \bmod d]$, $k \in \mathbb{Z}$ sei und $f_d * \psi[k]$ die diskrete Faltung, definiert durch

$$f_d * \psi[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_d[n]\psi[k - n] \quad (7.1.5)$$

ist. Algorithmus 1 berechnet also die diskrete Faltung der periodischen Fortsetzung der Zeitreihe f mit den Samplen $\psi[k] = \psi(k)$ des kontinuierlichen Filters $\psi(t)$. Interpretiert man die Zeitreihe f als mit Rate 1 erhaltene Sample auf $[0, d]$ einer d-periodischen kontinuierlichen Funktion $f_K(t)$, so approximiert die diskrete Faltung $f_d * \psi[k]$ die kontinuierliche Faltung $f_K * \psi_K(k)$.

Die Ausgabe $g[k]$, $k = 0, \dots, d - 1$ ist somit eine Approximation an die Filterung einer kontinuierlichen d-periodischen Funktion f_K , mit $f[k] = f_K(k)$, mit dem kontinuierlichen Filter ψ_K an den Stellen k , $k = 0, \dots, d - 1$. Da f_K d-periodisch ist, ist auch die Faltung mit ψ_K d-periodisch, weshalb es genügt, die Sample an den Stellen $0, \dots, d - 1$ zu betrachten.

Diese Interpretation liefert Informationen über die Frequenzen, die durch die Bandpassfilter ψ_j in der Wavelet-Transformation abgedeckt werden müssen. Die höchste Frequenz von f_K , die durch die Zeitreihe f dargestellt werden kann, ist wegen der Samplingrate 1. Da f_K d -periodisch ist, ist die niedrigste Frequenz, die durch die ψ_j abgedeckt werden muss $\frac{1}{d}$. Die Mittenfrequenz von ψ_j ist 2^j . Die maximal mögliche Auflösung der Wavelet-Transformation wird somit mit $\log_2 d$ Wavelets erreicht. Werden weniger genutzt, müssen die niedrigeren Frequenzen, die dann nicht durch die ψ_j abgedeckt werden, durch einen breiteren Tiefpass ϕ abgedeckt werden.

Damit ist klar, wie Mallat die Zeitreihen interpretiert und die Faltung mit den kontinuierlichen Filtern ψ_j und ϕ durchführt. Die Scatter-Koeffizienten haben die Form $U[p]f_K * \phi$. Auf Grund der Interpretation, dass f_K d -periodisch ist, sind auch diese Koeffizienten d -periodisch und mit der wiederholten Anwendung von Algorithmus 1 werden Approximationen an $U[p]f_K * \phi(k)$, $k = 0, \dots, d-1$ erhalten. Sei T die Fensterlänge der Funktion ϕ . Die Faltung mit dieser entspricht dann etwa dem Bilden eines Durchschnitts über ein Zeitfenster der Länge T . Es ist deshalb nicht notwendig, alle d Sample von $U[p]f_K * \phi(k)$ zu behalten. Um die Dimension der Darstellung der Scatter-Transformation einer Zeitreihe zu verringern, werden nur die Sample $\lfloor \frac{kT}{2} \rfloor$, $k = 0, \dots, \frac{2d}{T}$ genutzt [8]. Um die Dimension der Darstellung weiter zu reduzieren, werden wegen der Überlegung aus Kapitel 3 zur Funktion des Betrages, der die Energie bei jeder Anwendung in niedrigfrequenteren Bereiche schiebt, und dem Beweis von Satz (4.3.2) in [6] nur frequenzabsteigende Pfade $p = \lambda_1, \dots, \lambda_m$ mit $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ berechnet.

Da die Anzahl zu berechnender Scatter-Koeffizienten trotz dieser Einschränkung in jeder Ordnung deutlich wächst [8] und motiviert durch Satz 4.3.1, der besagt, dass die Energie in Scatter-Koeffizienten zu langen Pfaden gering ist, und Mallats Untersuchungen in [8], ist der Standard in Mallats Implementierung, nur Pfade bis zur Länge 2 zu berücksichtigen. Die maximal berücksichtigte Pfadlänge zu erhöhen verbessert das Ergebnis meist nicht. Dies zeigen auch die Untersuchungen in Kapitel 8.

Wir betrachten in dieser Arbeit nicht die Analyse der Scatter-Koeffizienten eines Signals, sondern möchten die Scatter-Transformation nutzen, um einen alternativen, translationsinvarianten und unter Verformungen stabilen Abstandsbegriff zu erhalten. Zu zwei Zeitreihen f und $g \in \mathbb{R}^d$ kann der Scatter-Abstand $\|\bar{S}f_K - \bar{S}g_K\|_{\bar{P}_\infty}$ der, wie oben beschrieben, zu f und g assoziierten, periodischen und kontinuierlichen Signale f_K und g_K durch den euklidischen Abstand der, wie in diesem Kapitel beschrieben berechneten, Scatter-Koeffizienten approximiert werden.

7.2. Die wichtigsten Parameter

Die erste Wahl, die für die Scatter-Transformation getroffen werden muss, ist, welches Mutterwavelet genutzt wird. Zur Auswahl stehen im eindimensionalen Fall unter anderem Morlet- und Gabor-Filter [8, 22], die Mallat zur Analyse von Audiosignalen nutzt, und Spline-Filter [7] der Ordnung 1 und der Ordnung 3, die alle in den Kapiteln 3 bis 5 für die Wavelets geforderten Eigenschaften erfüllen. Abhängig von der Wahl des Mutterwavelets stehen verschiedene weitere Optionen zur Verfügung. Werden Spline-Filter genutzt, ist ein Parameter die Ordnung der Splines, implementiert sind Ordnung 1, das heißt lineare Splines und Ordnung 3, das heißt kubische Splines. Außerdem kann der Parameter J gewählt werden. Dieser gibt, wie in Kapitel 7.1 beschrieben, die Anzahl Wavelets ψ_λ an, die für die Wavelet-Transformation genutzt werden sollen. Je größer J , desto besser die Frequenzauflösung der Transformation, desto schmaler jedoch auch die Frequenzbandweite des Tiefpasses Φ , wodurch in jeder Ordnung mehr Informationen verloren gehen, die durch die nächste Ordnung wiedergewonnen werden müssen. In Kapitel 7.1 haben wir gesehen, dass J zwischen 0 und $\log_2 d$, mit d der Länge der Zeitreihe f , gewählt werden kann. Der letzte Parameter, der im Fall von Spline-Wavelets gewählt werden kann, ist die Ordnung M , bis zu der die Transformation durchgeführt werden soll. M gibt die maximale Länge der berücksichtigten Pfade an.

Morlet-Wavelets erfüllen nicht die Unitaritätsbedingung der Wavelet-Transformation aus Satz (3.2.2). Die Idee ist, eine Familie von Filtern zu nutzen, die die Unitaritätsbedingung (3.2.1) ungefähr erfüllen, in dem Sinne, dass in etwa die gesamte Frequenzachse gleichmäßig durch sie abgedeckt wird. Mit diesen ist die Transformation daher deutlich flexibler, es kommen viele weitere Parameter hinzu, der wichtigste davon der Parameter Q . Dieser wurde bereits in Kapitel 3.2 erwähnt und bestimmt die Anzahl Wavelets pro Oktave, das heißt Verdopplung der Frequenz. In Kapitel 8 werden wir Spline-Wavelets der Ordnung 3 nutzen. Bisher ist die Scatter-Transformation mit Spline-Wavelets nur für Signale der Länge $N = 2^j$ für ein $j \in \mathbb{N}$ implementiert. Deshalb werden bei der Analyse der Winddaten mit der Scatter-Transformation nur die ersten 8192 Messwerte der Sensoren berücksichtigt. Es ist jedoch möglich, die Transformation auch für Signallängen, die keine Potenzen von zwei sind, zu implementieren.

8. Scatter-Transformation zur Analyse von Winddaten

In diesem Kapitel wird die in Kapitel 7 vorgestellte Implementierung der Scatter-Transformation von Mallat angewandt. Als Mutterwavelet wird ein Spline-Wavelet der Ordnung 3 (vgl. Abb. 3.2.3) genutzt. Kapitel 8.1 untersucht an einem künstlichen, hochfrequenten Signal die Translationsinvarianz und die Stabilität der Scatter-Transformation. Zum einen wird betrachtet, wie die Parameterwahl die Eigenschaften beeinflusst. Zum anderen wird die euklidische Distanz der Scatter-transformierten Signale (im Nachfolgenden kurz: *Scatter-Distanz*) mit der euklidischen Distanz der Originalsignale, der euklidischen Distanz der Fourier-Transformierten und der Dynamic-Time-Warping-Distanz verglichen. In Kapitel 8.2 wird die Scatter-Transformation im Pre-Processing-Schritt der Analyse von Winddaten aus numerischen Simulationen (vgl. Kapitel 2) genutzt. Zuerst wird der Einfluss der Parameterwahl in der Scatter-Transformation auf die, durch das nichtlineare Dimensionsreduktionsverfahren Diffusion Maps (vgl. Kapitel 2.2), gelieferten Ergebnisse untersucht. Im Anschluss werden die Ergebnisse, die Diffusion Maps mit der Scatter-Distanz liefert, mit den Ergebnissen von Diffusion Maps mit der euklidischen Distanz und der DTW-Distanz verglichen.

8.1. Künstliche Signale

Das in diesem Kapitel untersuchte künstliche, kontinuierliche Signal ist eine hochfrequente Zusammensetzung von Kosinus- und Sinus-Funktionen:

$$f_K(t) = \sin(10t) + 3 \cos(25t) - 7 \sin(50t).$$

Die betrachtete Zeitreihe f besteht aus 1024 äquidistant auf $[0, 2\pi]$ verteilte Sample dieses Signals. Diese werden in Abbildung 8.1.6 dargestellt.

Zunächst untersuchen wir, wie sich die Scatter-Distanz für verschiedene Parameter unter einfachen (vgl. Kapitel 3.1) Verformungen $\tau_j(t) = j \frac{0,5}{100} t$, $j = -100, \dots, 100$ verhält. Dazu betrachten wir die Scatter-Distanz der Zeitreihe f zu den Zeitreihen f_j , die 1024 äquidistant auf $[0, 2\pi]$ verteilte Sample der verformten kontinuierlichen Signale $f_K(t - \tau_j(t))$ sind. Die maximal betrachteten Verformungen sind für $j = -100$ die Halbierung der Geschwindigkeit des Originalsignals und für $j = 100$ die Erhöhung der Geschwindigkeit um den Faktor 1,5.

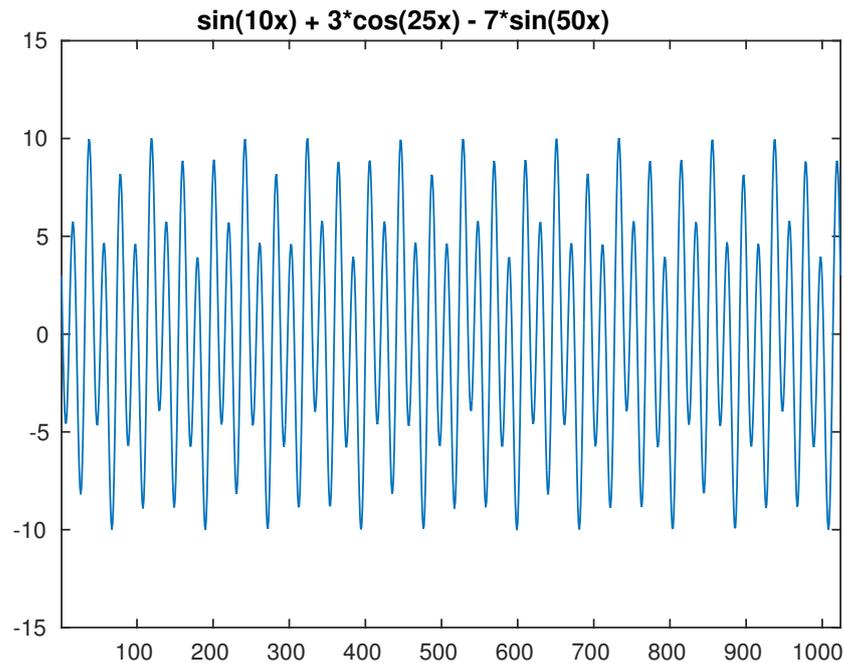
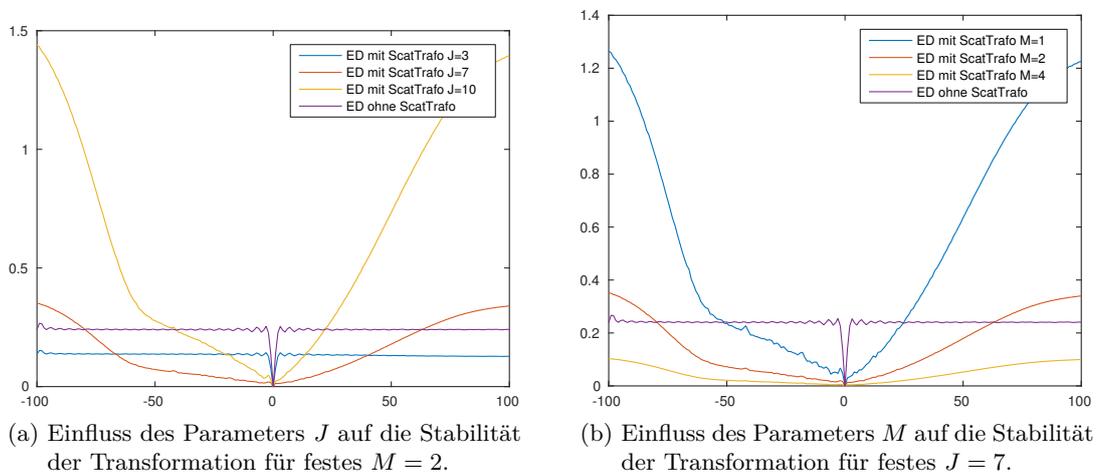


Abbildung 8.1.6: Das in diesem Kapitel untersuchte, hochfrequente Signal $f_K(t) = \sin(10t) + 3 \cos(25t) - 7 \sin(50t)$ an 1024 äquidistanten Samplen auf $[0, 2\pi]$.



(a) Einfluss des Parameters J auf die Stabilität der Transformation für festes $M = 2$.

(b) Einfluss des Parameters M auf die Stabilität der Transformation für festes $J = 7$.

Abbildung 8.1.7: Einfluss der Parameter J und M auf die Stabilität unter Verformungen. Als Mutterwavelet wurde ein Spline-Wavelet genutzt. Abgebildet ist die Scatter-Distanz von 1024 Samplen des Signals $f_K(t)$ zu je 1024 Samplen der verformten Signale $f_K(t - \tau_j(t))$ mit $\tau_j(t) = j \frac{0,5}{100} t$, $j = -100, \dots, 100$.

Abbildung 8.1.7 zeigt die Entwicklung der Scatter-Distanz unter diesen Verformungen

für verschiedene Parameter. Als Vergleich ist auch die euklidische Distanz der Zeitreihen abgebildet. Besonders interessant ist das Verhalten für kleine Verformungen, das heißt für betragsmäßig kleine j . Für Spline-Mutterwavelets sind die zu wählenden Parameter, wie in Kapitel 7.2 beschrieben, die Ordnung M der Scatter-Transformation und die Anzahl J der für die Wavelet-Transformation genutzten Wavelets ψ_λ . Für Signale der Länge 1024 kann J zwischen 0 und 10 gewählt werden (vgl. Kapitel 7.1). In Abbildung 8.1.7 (a) wurde $M = 2$ fest gewählt und das Verhalten der Scatter-Distanz unter Verformung für verschiedene Parameter J getestet. Während das Verhalten für $J = 3$ eher dem instabilen Verhalten der euklidischen Distanz ähnelt, zeigen $J = 7$ und $J = 10$ ein sehr ähnliches, stabiles Verhalten. Um den Einfluss des Parameters M auf die Stabilität unter Verformungen zu untersuchen, wurde in Abbildung 8.1.7 (b) $J = 7$ fest gewählt und M variiert. Der Einfluss des Parameters M auf die Stabilität ist gering.

Es kann festgehalten werden, dass die Scatter-Distanz für ausreichend großes J und beliebiges M stabil unter einfachen Verformungen ist. Dass die Distanz für größer werdende Verformungen ansteigt zeigt, dass die Transformation die Information über die Verformung nicht verliert. Abbildung 8.1.8 zeigt das Verhalten verschiedener Abstandsbegriffe unter den oben beschriebenen Verformungen. Für die Scatter-Transformation wurden die Parameter $J = 7$ und $M = 2$ gewählt. Während die euklidische Distanz und die euklidische Distanz der (Fast-)Fourier-transformierten (FFT) Zeitreihen sehr instabil unter kleinen Verformungen ist, zeigen die Dynamic-Time-Warping-Distanz und die Scatter-Distanz ein ähnlich stabiles Verhalten.

Als nächstes untersuchen wir kurz das Verhalten der Scatter-Distanz unter Verschiebungen. Dazu betrachten wir den Abstand der Zeitreihe f zu den Zeitreihen g_j , $j = 0, \dots, 50$, wobei g_j 1024 äquidistant auf $[0, 2\pi]$ verteilte Sample des verschobenen Signals $f_K(t + j \frac{\pi}{125})$ sind. Für $j = 50$ wird f_K genau um eine Periode verschoben. Parametertests ergeben erneut, dass J lediglich nicht zu klein gewählt werden darf und die Wahl von M nicht entscheidend ist. Abbildung 8.1.9 zeigt das Verhalten verschiedener Abstandsbegriffe unter diesen Verschiebungen. Für die Scatter-Transformation wurden erneut die Parameter $J = 7$ und $M = 2$ gewählt. Die Scatter-Distanz schneidet bei dem Vergleich am besten ab, sie zeigt sogar stabileres Verhalten als die Dynamic-Time-Warping-Distanz.

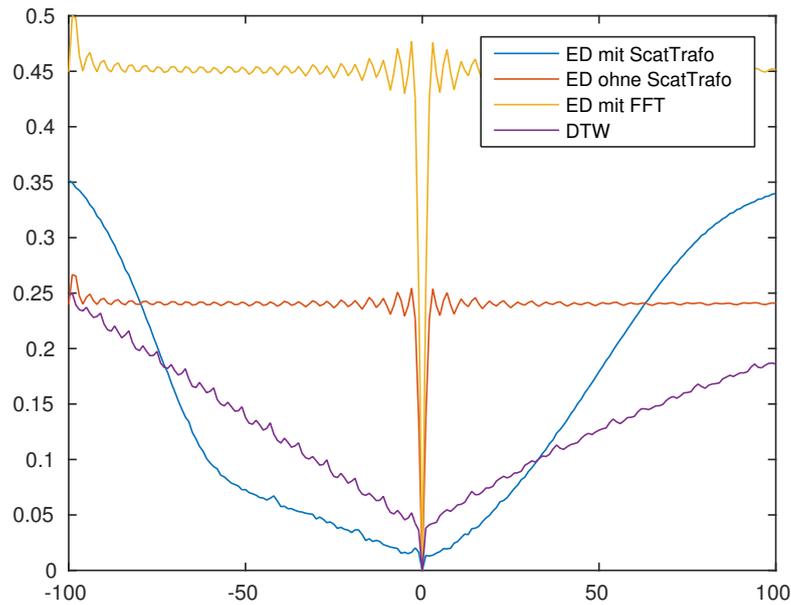


Abbildung 8.1.8: Stabilität unter Verformungen von verschiedenen Abstands begriffen. Abgebildet ist der Abstand von 1024 Samples des Signals $f_K(t)$ zu je 1024 Samples der verformten Signale $f_K(t - \tau_j(t))$ mit $\tau_j(t) = j \frac{0.5}{100} t$, $j = -100, \dots, 100$.

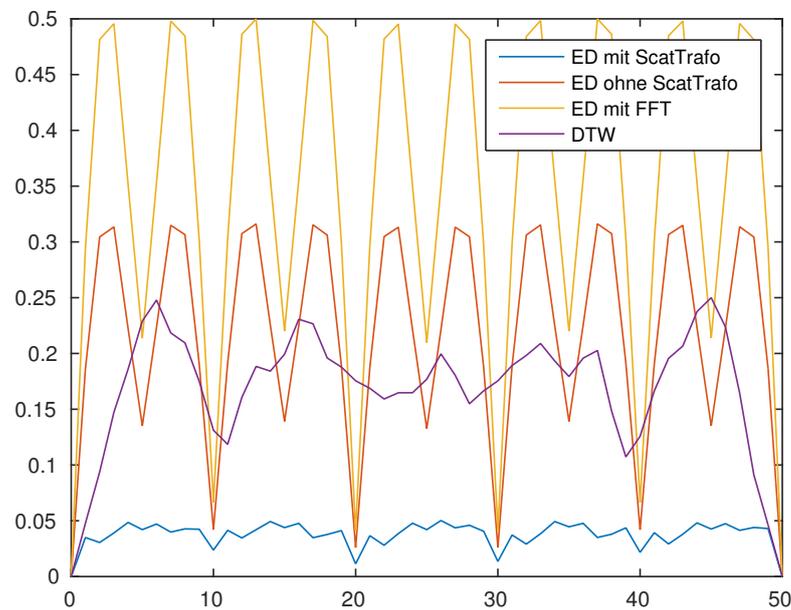


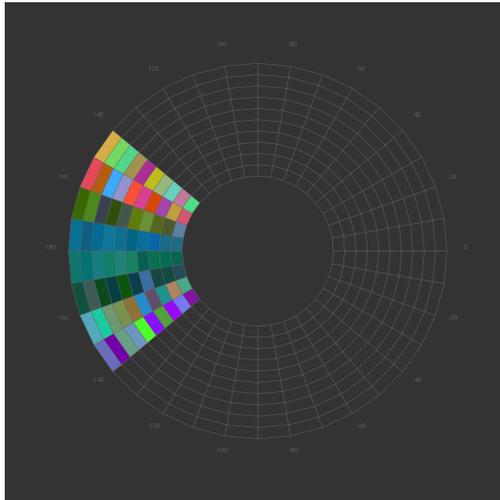
Abbildung 8.1.9: Stabilität unter Verschiebungen von verschiedenen Abstands begriffen. Abgebildet ist der Abstand von 1024 Samples des Signals $f_K(t)$ zu je 1024 Samples der verschobenen Signale $f_K(t + j \frac{\pi}{125})$, $j = 0, \dots, 50$.

8.2. Winddaten

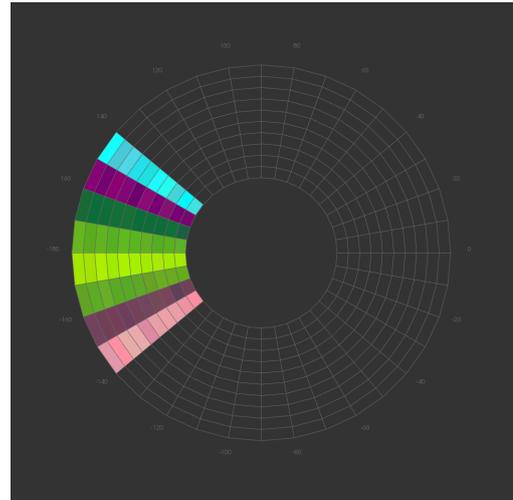
In diesem Kapitel werden wir den Scatter-Abstand im Diffusion Maps Verfahren zur Analyse der in Kapitel 2 vorgestellten Winddaten nutzen. Der betrachtete Fall ist der *storm load case*, bei diesem rotiert das Windrad nur, wenn der Wind etwa von vorne kommt. Zunächst betrachten wir die Daten eines Sensors, der die Biegung der Rotorblätter misst. Wir beschränken uns dabei auf die Daten aus Simulationen, in denen der Wind etwa von vorne auf das Windrad trifft und dieses rotiert. Aktuell ist die Scatter-Transformation mit Spline-Wavelets nur für Signallängen $N = 2^j$, $j \in \mathbb{N}$, implementiert. Statt der gesamten 13170 Messwerten der Sensoren, werden für die Scatter-Transformation im Folgenden daher nur die ersten 8192 berücksichtigt.

Die Messreihen werden mit Diffusion Maps in einen dreidimensionalen Raum eingebettet, und so skaliert, dass alle im Einheitswürfel $[0, 1]^3$ liegen. Die Koordinaten der Einbettung einer Messreihe werden dann als RGB-Farbcode interpretiert. Jeder Messreihe wird so eine Farbe zugeordnet, die ihre Position in der dreidimensionalen Einbettung durch Diffusion Maps beschreibt. Messreihen, die im Einbettungsraum nahe beieinander liegen, haben ähnliche Farben. Dargestellt werden die Ergebnisse in *Polar Plots*. Der Winkel in diesen Plots gibt die in 10° -Schritten geänderte Windrichtung der Simulation an und die Entfernung zur Mitte die Windart, von Windart 1 bis Windart 10.

Abbildung 8.2.10 (a) zeigt den Polar Plot, wenn die euklidische Distanz der Zeitreihen im Diffusion Maps Algorithmus genutzt wird. Da dieser Abstand weder stabil unter Verformungen, noch unter Verschiebungen ist, wird kein ähnliches Verhalten der Simulationen erkannt. In [3] wurde bereits gezeigt, dass mit Hilfe der DTW-Distanz Ähnlichkeiten der Simulationen bei identischen Windrichtungen erkannt werden können. Dies zeigt Abbildung 8.2.10 (b). In (c) ist ein, mit der Scatter-Distanz mit Spline-Wavelets der Ordnung 3 und Parametern $J = 11$ und $M = 1$, erhaltener Polar Plot zu sehen. Auch in diesem sind die Ähnlichkeiten der Simulationen bei identischen Windrichtungen erkennbar. Während die Berechnung der 80×80 -DTW-Distanzmatrix für den Diffusion Maps Algorithmus mit einer Implementierung von Fast-DTW 240 Sekunden gedauert hat, hat die Berechnung der Scatter-Distanzmatrix 1 Sekunde gedauert.



(a) Polar Plot für die euklidische Distanz.



(b) Polar Plot für die DTW-Distanz.

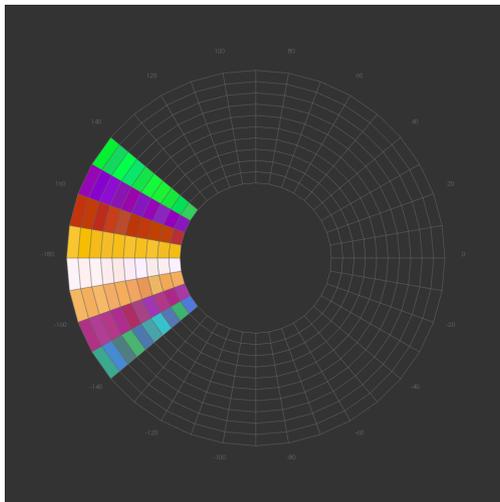
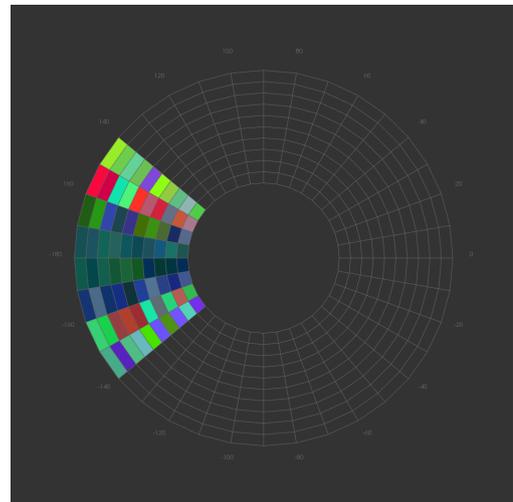
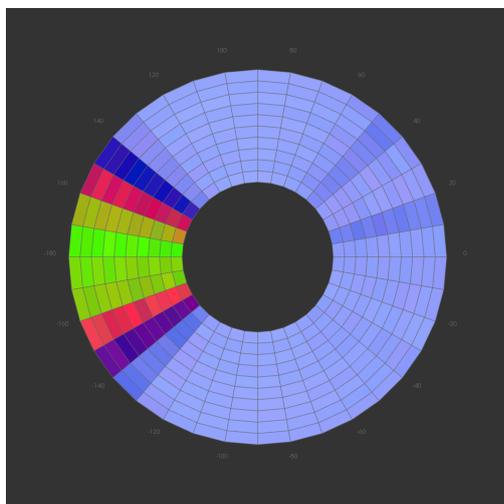
(c) Polar Plot für die Scatter-Distanz mit Parametern $J = 11$ und $M = 1$.(d) Polar Plot für die Scatter-Distanz mit Parametern $J = 8$ und $M = 1$. J ist zu klein gewählt.

Abbildung 8.2.10: Polar Plots zu einem Sensor, der die Biegung der Rotorblätter misst. Betrachtet wurden Simulationen für Windrichtungen, bei denen das Windrad rotiert. Im Diffusion Maps Algorithmus wurden verschiedene Abstandsbegriffe für die Simulationen verwendet. Die Abbildung zeigt die Ähnlichkeit der mit der DTW-Distanz gefundenen Einbettung und der mit der Scatter-Distanz für geeignete Parameter gefundenen.

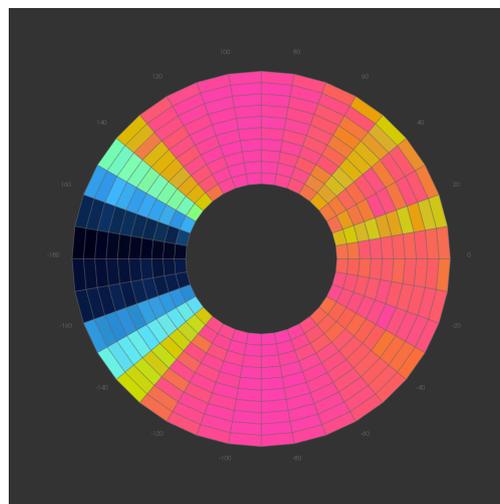
Auf den aus der Scatter-Distanz resultierenden Polar Plot haben die Parameter J und M kaum Einfluss. Wie bereits in Kapitel 8.1 für ein künstlich erzeugtes Signal gesehen, darf J lediglich nicht zu klein gewählt werden, die Wahl von M ist für das Ergebnis nicht entscheidend. Für $M = 1$ ist die Berechnungszeit jedoch am kürzesten. Abbil-

dung 8.2.10 (d) zeigt den Polar Plot, wenn der Parameter J zu klein gewählt wird. In diesem Fall werden, wie bei der euklidischen Distanz, keine Ähnlichkeiten zwischen Simulationen identischer Windrichtungen erkannt.

Die Betrachtung des Sensors, der die Geschwindigkeit des Rotors misst, bestätigt die gesehenen Ergebnisse. Auch für diesen muss der Parameter J groß genug gewählt werden, während die Wahl von M für den resultierenden Polar Plot nicht entscheidend ist, und auch für diesen liefert Diffusion Maps mit der Scatter-Distanz eine sehr ähnliche Einbettung wie mit der DTW-Distanz. Dargestellt ist dies in Abbildung 8.2.11. In (a) ist der mit der DTW-Distanz erhaltene Polar Plot zu sehen, in (b) der mit der Scatter-Distanz mit Parametern $M = 1$ und $J = 11$. Die Berechnung der 360×360 -DTW-Distanzmatrix hat mit Fast-DTW 4950 Sekunden gedauert. Das entspricht etwa 1 Stunde und 23 Minuten. Die Berechnung der Scatter-Distanzmatrix hat mit diesen Parametern 6 Sekunden benötigt. Tatsächlich können bei Verwendung der Scatter-Distanz, zusätzlich zu den bereits mit DTW gesehenen Ähnlichkeiten der Simulationen, Unregelmäßigkeiten im Bereich von -40° festgestellt werden. Die Unregelmäßigkeiten der Simulationen zur Windrichtung -40° waren bisher nur bei der Analyse des Sensors, der die Rotorblattbiegung misst, aufgefallen [3].



(a) Polar Plot für die DTW-Distanz.



(b) Polar Plot für die Scatter-Distanz mit Parametern $J = 11$ und $M = 1$.

Abbildung 8.2.11: Polar Plots zu einem Sensor, der die Rotorgeschwindigkeit misst. Vgl. Abb. 8.2.10.

9. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir die Scatter-Transformation kennengelernt. Wir haben die mathematischen Grundlagen der Scatter-Transformation kontinuierlicher Signale, analysiert von Mallat in [6], betrachtet. Im Anschluss haben wir eine Verbindung zwischen der Scatter-Transformation für kontinuierliche Signale und der von Mallat implementierten Transformation für endliche Zeitreihen erarbeitet. Danach wurde an einem künstlichen Beispiel untersucht, ob die zuvor gesehenen Eigenschaften der Scatter-Transformation kontinuierlicher Signale auch für die Transformation endlicher Zeitreihen gelten. Zum Abschluss wurde die Scatter-Transformation im Pre-Processing-Schritt zur Analyse von Winddaten aus numerischen Simulationen genutzt. Es hat sich herausgestellt, dass Diffusion Maps mit der Scatter-Distanz ebenso gute Ergebnisse wie mit der DTW-Distanz in erheblich kürzerer Zeit liefert. Tatsächlich haben wir gesehen, dass von Diffusion Maps mit der Scatter-Distanz sogar Unregelmäßigkeiten in den Daten gefunden werden können, die mit der DTW-Distanz nicht erkannt werden.

Zur Analyse der Winddaten haben wir in dieser Arbeit Spline-Wavelets verwendet. Eine andere Möglichkeit ist Morlet-Wavelets zu nutzen, deren Zahl und Bandbreite beliebig an die Bedürfnisse angepasst werden können. Durch die große Zahl neuer Freiheitsgrade können mit diesen noch weitere Besonderheiten in den Winddaten gefunden werden. Ein Beispiel ist der Zusammenhang der Biegung der Rotorblätter und der Rotorgeschwindigkeit. Einige, bei Tests mit Morlet-Wavelets entstandene, Polar Plots werden im Anhang gezeigt. Im Anhang findet sich ebenfalls ein Plot, der bei der Arbeit mit der Frequenz-Scatter-Transformation entstanden ist.

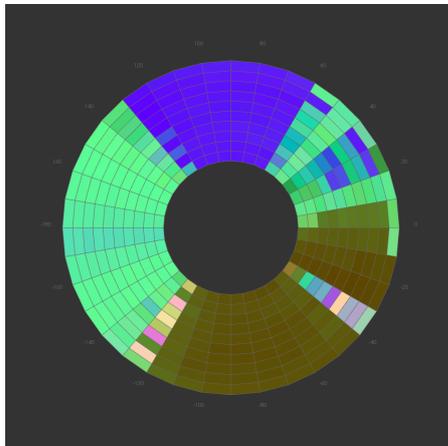
Die genaue Wahl der Filter in jeder Ordnung der Scatter-Transformation bietet beliebig viele Möglichkeiten für weitere Betrachtungen. Weitergehende Untersuchungen verdient die Erweiterung der Scatter-Transformation auf mehrdimensionale Zeitreihen, zum Beispiel Kombinationen mehrerer Sensoren. Dies, und wie weitere Invarianzen für mehrdimensionale Zeitreihen erhalten werden können, wird ebenfalls von Mallat in [6] behandelt. Für zweidimensionale Zeitreihen ist die Scatter-Transformation ebenfalls in Mallats Implementierung enthalten. Zusätzlich ist eine Erweiterung der Scatter-Transformation für zweidimensionale Zeitreihen enthalten, die neben Translationsinvarianz und Stabilität unter Verformungen Rotationsinvarianz bietet. Es wäre interessant zu untersuchen, ob die Betrachtung der Scatter-Transformation mehrdimensionaler Zeitreihen die Analyse von Winddaten aus numerischen Simulationen weiter vereinfachen kann, und ob Rotationsinvarianz dabei Vorteile bietet.

Literatur

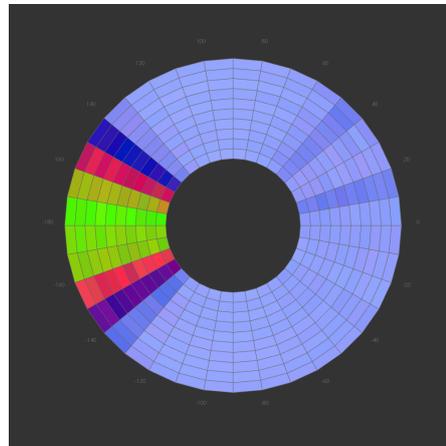
- [1] European Wind Energy Association Business Intelligence. *Aiming high - rewarding ambition in wind energy*. Techn. Ber. European Wind Energy Association, 2015.
- [2] WindEurope. <http://www.ewea.org/wind-energy-basics/facts/> (2016).
- [3] J. Garcke und R. Iza-Teran et al. *Dimensionality Reduction for the Analysis of Time Series Data from Wind Turbines*. 2016.
- [4] K.-D. Kammeyer und K. Kroschel. *Digitale Signalverarbeitung*. Springer Vieweg, 2012.
- [5] B. Vidakovic und P. Mueller. *Wavelets for kids: A tutorial introduction*. Techn. Ber. Duke University, 1991.
- [6] S. Mallat. “Group Invariant Scattering”. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 65.10 (2012), S. 1331–1398.
- [7] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing - The Sparse Way*. Academic Press, Elsevier, 2009.
- [8] J. Andén und S. Mallat. “Deep Scattering Spectrum”. In: 62.16 (2014), S. 4114–4128.
- [9] S. Mallat. “Recursive Interferometric Representations”. In: *Signal Processing Conference, 2010 18th European* (2010), S. 716–720.
- [10] M. A. Sprague et al. *FAST Modular Wind Turbine CAE Tool: Nonmatching Spatial and Temporal Meshes*. Techn. Ber. National Renewable Energy Laboratory, Golden, Colorado, 80401, USA, 2014.
- [11] J. Garcke. *Wissenschaftliches Rechnen II*. Vorlesungsskript, <http://www.ins.uni-bonn.de/teaching/vorlesungen/WissRech2SS16/> (2016). 2016.
- [12] E. Keogh und C. A. Ratanamahatana. “Exact indexing of dynamic time warping”. In: *Knowledge and Information Systems* 7.3 (2005), S. 358–386.
- [13] S. Salvador und P. Chan. “FastDTW: Toward Accurate Dynamic Time Warping in Linear Time and Space”. In: *Intelligent Data Analysis* 11.5 (2007).
- [14] R. Coifman und F. Lafon. “Diffusion maps”. In: *Applied and computational harmonic analysis* 21.1 (2006), S. 5–30.
- [15] B. Klingen. *Fouriertransformation für Ingenieur- und Naturwissenschaften*. Springer-Lehrbuch, 2001.

-
- [16] M. Frazier, B. Jawerth und G. Weiss. *Littlewood-Paley theory and the study of function spaces (Cbms Regional Conference Series in Mathematics)*. American Mathematical Society, 1991.
- [17] S. Mallat. *High dimensional classification by recursive interferometry*. Vortrag, <http://nuit-blanche.blogspot.de/2011/12/implementation-of-mallats-scattering.html> (2016). 2010.
- [18] J. B. Estrach. *Scattering Representations For Recognition*. Doktorarbeit. 2012.
- [19] S. Willard. *General Topology*. Courier Corporation, 1970.
- [20] Rathmann und Graef. *Mathematik für Ingenieure 4A*. Vorlesungsskript, [http://staatsmacht.org/Veranstaltungen/Mathematik für Ingenieure 4A \(Rathmann\) /Graef/stproc-4.pdf](http://staatsmacht.org/Veranstaltungen/Mathematik für Ingenieure 4A (Rathmann) /Graef/stproc-4.pdf) (2016).
- [21] G. Tzanetakis und P. Cook. “Musical Genre Classification of Audio Signals”. In: *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing* 10.5 (2002), S. 293–302.
- [22] J. Ashmead. “Morlet Wavelets in Quantum Mechanics”. In: *Quanta* 1.1 (2012), S. 58–70.
- [23] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer und J. R. Buck. *Lecture 15: The Discrete Fourier Transform (DFT)*. OpenCourseWare, <http://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-341-discrete-time-signal-processing-fall-2005/lecture-notes/lec15.pdf> (2016). 2006.

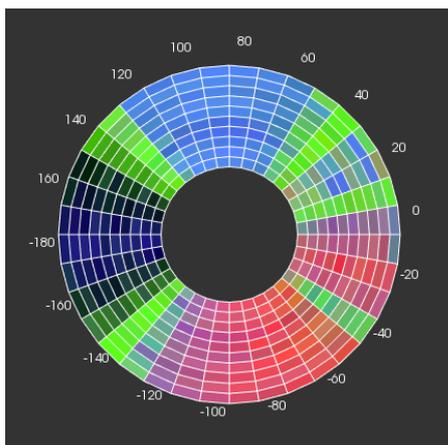
A. Weitere Polar Plots



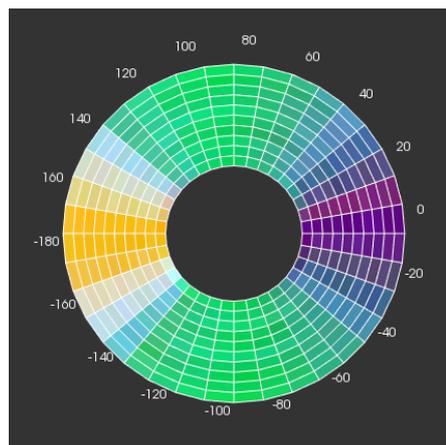
(a) Polar Plot für Sensor 116 (Biegung der Rotorblätter) mit der DTW-Distanz in Diffusion Maps.



(b) Polar Plot für Sensor 51 (Rotorgeschwindigkeit) mit der DTW-Distanz in Diffusion Maps.

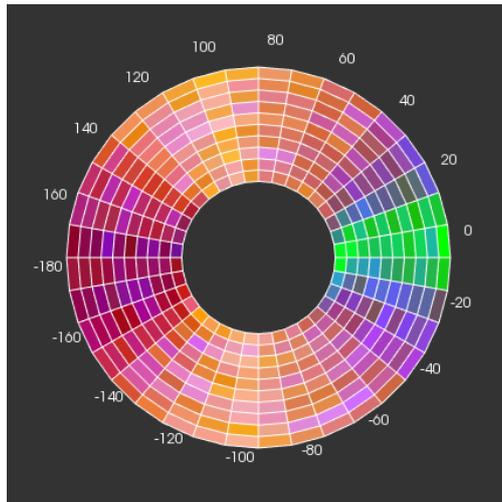


(c) Polar Plot für Sensor 116 (Biegung der Rotorblätter) mit der Scatter-Distanz für Morlet Wavelets mit Parametern 'dyadic' und $T = 5000$ in Diffusion Maps.

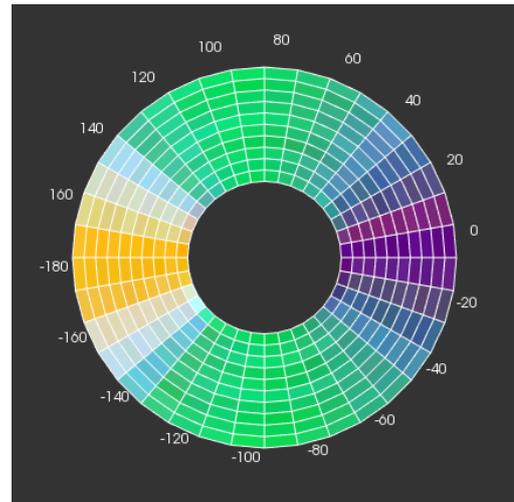


(d) Polar Plot für Sensor 51 (Rotorgeschwindigkeit) mit der Scatter-Distanz für Morlet Wavelets mit Parametern 'audio' und $T = 200$ in Diffusion Maps.

Abbildung A.1: (c): Mit Morlet-Wavelets erfolgt eine genauere Differenzierung im rotierenden Bereich. Die Simulationen werden nicht wie mit DTW in drei Gruppen unterteilt, sondern in vier. Die neue Gruppe, dargestellt in hellgrün, ist mit DTW für Sensor 51 in (b) in matt-blau sichtbar. (d): Unterscheidet sich deutlich von (b). Es wird erkannt, dass das Windrad, auch wenn der Wind nicht von vorne, sondern von hinten kommt, langsam rotiert. Nur im in (d) grün dargestellten Bereich, in dem der Wind von der Seite kommt, rotiert es nicht.



(a) Polar Plot für Sensor 116 (Biegung der Rotorblätter) mit der Frequenz-Scatter-Distanz für Morlet Wavelets mit Parametern 'audio', $Q2 = 1$, $T1 = 200$ und $T2 = \text{lengthScatKoeff}/2$ in Diffusion Maps.



(b) Polar Plot für Sensor 51 (Rotorgeschwindigkeit) mit der Scatter-Distanz für Morlet Wavelets mit Parametern 'audio' und $T = 200$ in Diffusion Maps.

Abbildung A.2: (a): Durch die Stabilität unter leichten Frequenzverformungen werden die Simulationen aus dem nicht rotierenden Bereich (oben und unten) als ähnlich erkannt. Im nur langsam rotierenden Bereich auf der rechten Seite ergibt sich eine bessere Darstellung, als mit DTW (vgl. Abb. A.1 (a)). Die Abbildung zeigt die Ähnlichkeit der Sensoren 51 und 116. Die Biegung der Rotorblätter scheint fast ausschließlich von der Rotorgeschwindigkeit abzuhängen.